

Aufgabe 1

1. **wahr**, f ist stetig, also beschränkt
2. **wahr**, Übungsaufgabe 31
3. **falsch**, betrachte $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$ auf $[0, 1]$
4. **falsch**, jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist glm. stetig
5. **wahr**, Mittelwertsatz: $0 < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$
6. **wahr**, f ist streng monoton fallend
7. **wahr**, siehe Vorlesung
8. **wahr**, f ist stetig, also integrierbar
9. **falsch**, betrachte $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ -1 & , \text{sonst} \end{cases}$ auf $[0, 1]$
10. **falsch**, betrachte $f(x) = |x|$ und $g(x) = x$ auf $[-1, 1]$

Aufgabe 2

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq \delta$. Fallunterscheidung: Wenn $\boxed{d(y) \geq d(x)}$, dann existiert ein $z \in M$ mit $|x - z| - d(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Also

$$\begin{aligned} |d(y) - d(x)| &= d(y) - d(x) \\ &\leq |y - z| - |x - z| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq ||y - z| - |x - z|| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq |y - x| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$\boxed{d(y) \leq d(x)}$: wähle analog $z \in M$ mit $|y - z| - d(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und rechne

$$\begin{aligned} |d(y) - d(x)| &= d(x) - d(y) \\ &\leq |x - z| - |y - z| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq ||x - z| - |y - z|| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq |y - x| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach der ε - δ -Def. ist f stetig in x . Da δ nicht von x abhängt, ist f auch glm. stetig.

Aufgabe 3

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f offenbar differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für $x < 0$ und $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ für $x > 0$. Differenzierbarkeit im Nullpunkt:

$$\left| \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right| = \begin{cases} \left| \frac{e^{-1/h}}{h} \right| & , h > 0 \\ 0 & , h \leq 0 \end{cases} \leq \left| \frac{e^{-1/h}}{h} \right|,$$

also existiert

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h}}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

nach l'Hospital. f ist damit auf ganz \mathbb{R} differenzierbar,

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \frac{1}{x^2}e^{-1/x} & , x > 0 \end{cases}.$$

Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}e^{-1/x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$$

nach l'Hospital ist f' auf ganz \mathbb{R} stetig.

Aufgabe 4

Induktion über n . (IA) $n = 1$ ist richtig nach Vorlesung. (IS) $n \rightarrow n + 1$: Sei f bei x_0 $2(n + 1)$ -mal differenzierbar und

$$f'(x_0) = \dots = f^{(2n+1)}(x_0) = 0 \neq f^{(2n+2)}(x_0)$$

O.B.d.A. sei zunächst $f^{(2n+2)}(x_0) > 0$. Dann hat f'' nach (IV) bei x_0 ein relatives Minimum. Also $f''(x) \geq 0$ in einer Umgebung U von x_0 . Damit ist f' monoton wachsend in U . Sei $x \in U$. Dann gilt nach dem MWS

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

für ein $\xi \in (x, x_0)$. Falls $x \leq x_0$, dann gilt $\xi \leq x_0$, also $f'(\xi) \leq 0$ wegen der Monotonie und damit $f'(\xi)(x - x_0) \geq 0$, also $f(x) \geq f(x_0)$. Umgekehrt: falls $x \geq x_0$, dann gilt $\xi \geq x_0$, also $f'(\xi) \geq 0$ und damit auch $f'(\xi)(x - x_0) \geq 0$, also $f(x) \geq f(x_0)$. Daher ist bei x_0 ein lokales Minimum von f . Falls $f^{(2n+2)}(x_0) < 0$, dann hat $g := -f$ bei x_0 ein lokales Minimum, also f ein lokales Maximum.

Aufgabe 5

Wegen $f(0) = f(1) = 0$, $f(4) = -1$, $f(5) = 6$ hat f nach dem ZWS mindestens drei Nullstellen. f ist auf ganz \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar,

$$f'(x) = 2^x \log 2 - 2x, \quad f''(x) = 2^x (\log 2)^2 - 2,$$

$$f'''(x) = 2^x (\log 2)^3 > 0$$

Also hat f''' auf \mathbb{R} keine Nullstelle. Hätte f vier Nullstellen, dann hätte f' nach dem Satz von Rolle mindestens drei Nullstellen, und f'' wiederum nach Rolle mindestens zwei Nullstellen, also f''' nach Rolle eine Nullstelle, ein Widerspruch. Also hat f höchstens und damit genau drei reelle Nullstellen.

Aufgabe 6

O.B.d.A. sei $x > 0$, denn für $x = 0$ ist nichts zu zeigen. Betrachte die Funktion

$$f(x) := \alpha x + (1 - \alpha)y - x^\alpha y^{1-\alpha}.$$

f ist für $x > 0$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}$$

Offenbar gilt $f(y) = 0$. Für $x \neq y$ eine Fallunterscheidung, $x < y$: Dann ist nach dem MWS

$$f(x) = f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$$

für ein $\xi \in (x, y)$, also $0 < x < \xi < y$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha(1 - \xi^{\alpha-1} y^{1-\alpha})(x - y) \\ &= \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{(\underbrace{\xi^{\alpha-1}}_{>y^{\alpha-1}, \text{ da } \alpha-1 < 0} y^{1-\alpha} - 1)}_{>y^0-1=0} \underbrace{(y - x)}_{>0} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Analog für $x > y$:

$$f(x) = f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$$

für $\xi \in (x, y)$, also $0 < y < \xi < x$ und damit

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{(1 - \underbrace{\xi^{\alpha-1}}_{<y^{\alpha-1}, \text{ da } \alpha-1 < 0} y^{1-\alpha})}_{>1-y^0=0} \underbrace{(x - y)}_{>0} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Insgesamt also $f(x) \geq 0$.

Aufgabe 7

$f(x) := \log(x)$ ist streng monoton wachsend, also integrierbar über $[1, a]$. Wähle $x_k^{(n)} := a^{k/n}$ und Treppenfunktionen

$$\sigma_n(x) := f(x_{k-1}^{(n)}), \psi_n(x) := f(x_k^{(n)}), \quad x \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$$

mit $\sigma_n(a) := 0, \psi_n(a) := 1$. Wegen der Monotonie von f gilt $\sigma_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$, also

$$\int_1^a \sigma_n(x) dx \leq \int_1^a f(x) dx \leq \int_1^a \psi_n(x) dx.$$

Berechne die begrenzenden Integrale:

$$\begin{aligned} \int_1^a \psi_n(x) dx &= \sum_{k=1}^n \log a^{k/n} (a^{k/n} - a^{(k-1)/n}) \\ &= \log(a) \frac{a^{1/n} - 1}{n} \sum_{k=1}^n k a^{(k-1)/n}. \end{aligned}$$

Für $f_n(x) := \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ und $x > 1$ gilt

$$f'_n(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)x^n}{x-1} - \frac{x^{n+1} - 1}{(x-1)^2},$$

also bei $x = a^{1/n}$

$$\begin{aligned} \int_1^a \psi_n(x) dx &= \log(a) \frac{a^{1/n} - 1}{n} \left(\frac{(n+1)a}{a^{1/n} - 1} - \frac{a^{(n+1)/n} - 1}{(a^{1/n} - 1)^2} \right) \\ &= \log(a) \left(\frac{n+1}{n} a - \frac{a^{(n+1)/n} - 1}{n(a^{1/n} - 1)} \right). \end{aligned}$$

Anwendung des Satzes von l'Hospital ergibt (rückwärts gelesen)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^a \psi_n(x) dx &= a \log(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} - \log(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{(n+1)/n} - 1}{n(a^{1/n} - 1)} \\ &= a \log(a) - \log(a) \lim_{x \searrow 0} \frac{x(a^{x+1} - 1)}{a^x - 1} \\ &= a \log(a) - \log(a) \lim_{x \searrow 0} \frac{a^{x+1} - 1 + x \log(a) a^{x+1}}{\log(a) a^x} \\ &= a \log(a) - a + 1 \end{aligned}$$

Analog für die Unterintegrale:

$$\begin{aligned} \int_1^a \sigma_n(x) dx &= \sum_{k=1}^n \log a^{(k-1)/n} (a^{k/n} - a^{(k-1)/n}) \\ &= \log(a) \frac{a^{1/n} - 1}{n} \sum_{k=1}^n (k-1) a^{(k-1)/n} \\ &= \log(a) \frac{a^{1/n} - 1}{n} \left(\sum_{k=1}^n k a^{(k-1)/n} - \underbrace{\sum_{k=1}^n a^{(k-1)/n}}_{=\sum_{k=0}^{n-1} a^{k/n} = \frac{a-1}{a^{1/n}-1}} \right) \\ &= \underbrace{\log(a) \frac{a^{1/n} - 1}{n} \sum_{k=1}^n k a^{(k-1)/n}}_{\rightarrow a \log a - a + 1, \text{ s.o.}} - \underbrace{\log(a) \frac{a-1}{n}}_{\rightarrow 0}, \end{aligned}$$

also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^a \sigma_n(x) dx = a \log(a) - a + 1 = \int_1^a \log(x) dx.$$