Name: ....

Aufgabe 1:

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuze dazu die richtigen Antworten an. Es werden keine Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht bewertet. Ist die Gesamtpunktzahl negativ, wird zu Null aufgewertet.

1. Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt. wahr ☐ falsch ☐
2. Jede gleichmäßig stetige Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt. wahr ☐ falsch ☐
3. Jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in mindestens einem Punkt $x \in [a, b]$ stetig. wahr ☐ falsch ☐
4. Es gibt eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die nicht gleichmäßig stetig ist. wahr ☐ falsch ☐
5. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) > 0$. wahr ☐ falsch ☐
6. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist f injektiv. wahr ☐ falsch ☐
7. Jede monoton fallende Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar. wahr ☐ falsch ☐
8. Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar. wahr ☐ falsch ☐
9. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist. wahr ☐ falsch ☐
10. Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b g(x)dx\right|$. wahr ☐ falsch ☐

(10)

Name: ....

Aufgabe 2:

Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x) := \inf \big\{ |x - y| \,\big|\, y \in M \big\}.$$

Zeige, dass d auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Ist d auch gleichmäßig stetig? (10)

Name: ....

Aufgabe 3:

Zeige, dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & , \text{ falls } \quad x > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar ist und berechne $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. (10)

Name: ....

Aufgabe 4:

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bei $x_0 \in D$ $2n$-mal differenzierbar mit

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(2n)}(x_0) \neq 0.$$

Zeige, dass f bei x_0 ein lokales Extremum besitzt. (10)

Name: ....

Aufgabe 5:

Bestimme die Anzahl der reellen Nullstellen der durch

$$f(x) := 2^x - x^2 - 1$$

gegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachte f an geeigneten Punkten $x \in \mathbb{N},\ 0 \leq x \leq 5$. (10)

Name: ....

Aufgabe 6:

Zeige (z. B. mit Hilfe des Mittelwertsatzes), dass für $\alpha \in (0,1)$ und $x, y \geq 0$ die Abschätzung

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha) y$$

gilt, mit Gleichheit genau für $x = y$. (10)

Name: ....

Aufgabe 7:

Sei $a > 1$. Zeige, dass das Integral $\displaystyle\int_1^a \log(x)dx$ existiert und berechne seinen Wert mit Hilfe von Ober- und Unterintegralen zur Zerlegungsfolge $x_k^{(n)} := a^{k/n},\ k = 0, \ldots, n$.

Hinweis: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ (10)

Name: ....

Name: ....

Name: ....