

Aufgabe 1:

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuze dazu die richtigen Antworten an. Es werden keine Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht bewertet. Ist die Gesamtpunktzahl negativ, wird zu Null aufgewertet.

1. Jede nichtleere Menge $M \subset \mathbb{N}$ enthält ein Minimum. wahr falsch
2. Jede abzählbare Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist unbeschränkt. wahr falsch
3. Es gibt keine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. wahr falsch
4. Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt.
Dann existiert ein $m \in M$ mit $m = \inf M$. wahr falsch
5. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend und konvergent.
Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. wahr falsch
6. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann besitzt $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
mindestens einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$. wahr falsch
7. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergent, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
Dann ist $\{a - a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. wahr falsch
8. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergent, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (a - a_n)$. wahr falsch
9. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$. wahr falsch
10. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegeben mit $|a_n| \leq 2^{-n}$.
Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. wahr falsch

(10)

Aufgabe 2:

Zeige, dass

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \quad n \geq 1.$$

(10)

Aufgabe 3:

Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben durch 1 beschränkt ist und konvergiert. Berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (10)

Aufgabe 4:

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a_0 := 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

Hinweis: Betrachte zunächst $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$. (10)

Aufgabe 5:

Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ nichtleer, beschränkt und $X \cap Y \neq \emptyset$.

Zeige, dass

$$\sup(X \cap Y) \leq \min(\sup X, \sup Y).$$

(8)

Aufgabe 6:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}.$$

(12)

Aufgabe 7:

Zeige, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimme ihre Summen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}.$$

(10)