Nachklausur Analysis I

Aufgabe 1

1. Jede beschränkte, nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke.
2. Jede beschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist konvergent.
3. Jede Cauchy-Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt.
4. Jede monoton wachsende Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist konvergent.
5. Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.
6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $|f(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f in $x = 0$ stetig.
7. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann existiert ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = \sup\{f(y)|y \in [a, b]\}$.
8. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) \neq f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) \neq 0$.
9. Jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig.
10. Jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist monoton (wachsend oder fallend).

Aufgabe 2

Beweise:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \quad \sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

Aufgabe 3

Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer, nach unten beschränkt und $\inf M > 0$. Zeige, dass $0 \notin M$, so dass $N := \{\frac{1}{x}|x \in M\}$ existiert. Zeige weiter, dass $\sup N$ existiert mit $\sup N = \frac{1}{\inf M}$.

Aufgabe 4

Betrachte die durch

$$f(x) := \frac{2 + x}{1 + x}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$.

(i) Zeige, dass $f([1, 2]) \subset [1, 2]$ und dass f einen Fixpunkt $\xi \in [1, 2]$ besitzt.

(ii) Zeige mit (i) und dem Mittelwertsatz, dass die durch

$$a_0 \in [1, 2] \text{ beliebig}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \; a_{n+1} := f(a_n)$$

rekursiv gegebene Folge die Eigenschaft $|a_n - \xi| \leq \frac{1}{4^n}$ besitzt und daher gegen ξ konvergiert.

Aufgabe 5

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimme, wenn vorhanden, ihre Summen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2 - 2n + 5}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)(n + 2)}$$

Hinweis zu (iii): Benutze zuerst $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Aufgabe 6

Zeige, dass die durch

$$f(x) := \sqrt{1 + x^2}, \qquad x \geq 0$$

gegebene Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ auf ihrem Definitionsbereich gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 7

Zeige, dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 + x & , \; x \geq 0 \\ \sin(x) & , \; x < 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar ist und berechne $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es existiere $c := \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = 0$.

Aufgabe 9

Sei $\alpha \in [0, 1]$ beliebig. Zeige mit Hilfe einer Extremwertaufgabe, dass dann die folgende Version der Bernoulli-Ungleichung gilt:

$$\forall x > -1 : \quad (1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

Aufgabe 10

Überprüfe, ob die durch

$$f(x) := \begin{cases} x & , \; x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & , \; x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ über $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist und berechne ggf. $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Hinweis: Der Hauptsatz $\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$ darf nicht benutzt werden!

Lösungen

Aufgabe 1

1. **wahr**: Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$
2. **falsch**: $a_n = (-1)^n$
3. **wahr**: Cauchy-Folgen sind konvergent, also beschränkt.
4. **falsch**: $a_n = n$
5. **falsch**: nur "$\Rightarrow$" gilt, für $a_n = 1$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht.
6. **wahr**: Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, $\delta := \varepsilon$
7. **wahr**: f ist stetig, nimmt also das Supremum an.
8. **wahr**: MWS
9. **falsch**: Treppenfunktionen
10. **falsch**: $f(x) = x^2$ auf $[-1, 1]$

Aufgabe 2

Die linke Ungleichung ist sofort klar, da für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sqrt{n} = n\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Induktion über n für die rechte Ungleichung: (IA) $n = 1$ ist klar. (IS) $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&\overset{\text{(IV)}}{\leq} 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} - 1 \\
&\leq \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(2n+1) + 1}{\sqrt{n+1}} - 1 \\
&= 2\sqrt{n+1} - 1
\end{aligned}$$

nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$.

Aufgabe 3

Wegen $\inf M > 0$ gilt für jedes $x \in M$ bereits $x \geq \inf M > 0$. Also ist die Definition von N sinnvoll. Da M nichtleer, ist auch N nichtleer. Sei $y = \frac{1}{x} \in N$ mit $x \in M$. Dann gilt $y = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf M}$, also ist $\frac{1}{\inf M}$ eine obere Schranke von N. Da N nichtleer und nach oben beschränkt, existiert $\sup N \in \mathbb{R}$. Da $\sup N$ die *kleinste* obere Schranke von N ist, gilt $\sup N \leq \frac{1}{\inf M}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\sup N \geq \frac{1}{\inf M}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Angenommen, $\delta > 0$ wäre "klein genug". Dann existiert nach Definition des Infimums ein $x \in M$ mit

$$\inf M \leq x < \inf M + \delta,$$

also

$$\frac{1}{\inf M} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{\inf M + \delta} \overset{!}{=} \frac{1}{\inf M} - \varepsilon.$$

Jetzt muss man nur noch oben $\delta > 0$ so wählen, dass

$$\frac{1}{\inf M + \delta} = \frac{1}{\inf M} - \varepsilon = \frac{1 - \varepsilon \inf M}{\inf M},$$

also äquivalent

$$\inf M + \delta = \frac{\inf M}{1 - \varepsilon \inf M}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\delta &:= \frac{\inf M}{1 - \varepsilon \inf M} - \inf M \\
&= \frac{\inf M - (1 - \varepsilon \inf M) \inf M}{1 - \varepsilon \inf M} \\
&= \frac{\varepsilon \inf M}{1 - \varepsilon \inf M} > 0.
\end{aligned}$$

O.B.d.A. sei dabei ε schon echt kleiner als $\frac{1}{\inf M} > 0$.

Aufgabe 4

(i) Sei $x \in [1, 2]$. Dann gilt

$$1 \leq 1 + \frac{1}{1+x} = f(x) \leq 1 + \frac{1}{2} \leq 2,$$

also $f(x) \in [1, 2]$. Die Fixpunktbedingung $f(\xi) = \xi$ ergibt

$$\frac{2+\xi}{1+\xi} = \xi,$$

also $\xi^2 = 2$ und damit ist $\xi = \sqrt{2}$ ein Fixpunkt in $[1, 2]$.

(ii) Wegen

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

gilt

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4}, \quad x \geq 1.$$

Also mit dem Mittelwertsatz

$$|a_{n+1} - \xi| = |f(a_n) - f(\xi)| = |f'(\xi)||a_n - \xi| \leq \frac{1}{4}|a_n - \xi|.$$

Da $|a_0 - \xi| \leq |a_0 - \frac{3}{2}| + |\frac{3}{2} - \xi| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{1}{4^0}$, gilt $|a_n - \xi| \leq \frac{1}{4^n}$ und damit $\lim_{n\to\infty} a_n = \xi = \sqrt{2}$.

Aufgabe 5

(i) Für $n \geq 1$ gilt $4n \geq 4$, also $-2n + 5 \leq 2n + 1$ und deshalb

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{n^2 - 2n + 5} &= \frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n^2 - 2n + 5} \\
&\geq \frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\
&\geq \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ divergiert dies gegen $+\infty$, also ist die Reihe (bestimmt) divergent.

(ii) Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n n!} \\ &= 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 3\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert dies gegen $\frac{3}{e} > 1$, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$. Nach dem zweiten Teil des Quotientenkriteriums divergiert die Reihe.

(iii) Teleskopreihe:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right)\right)\end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ konvergiert dies gegen $\frac{1}{4}$, also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 6

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $x, y \geq 0$ gilt nach binomischer Formel

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(y)\big| &= \left|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}\right| \\ &= \frac{1}{\left|\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}\right|}\left|x^2 - y^2\right| \\ &\leq \frac{1}{|x+y|}|x-y||x+y| \\ &= |x-y|,\end{aligned}$$

für $\delta := \varepsilon$ und $|x-y| \leq \delta$ gilt also

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq \varepsilon,$$

d. h. f ist gleichmäßig stetig, da δ unabhängig von x wählbar ist.

Aufgabe 7

Für $x \neq 0$ ist f stetig differenzierbar als Kombination stetig differenzierbarer Funktionen,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x > 0 \\ \cos(x) & , x < 0 \end{cases}.$$

Vermutung $f'(0)$ existiert und $f'(0) = 1$. Also rechnet man

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} - 1\right| &= \left|\frac{f(h)}{h} - 1\right| \\ &= \begin{cases} \left|\frac{h^2+h}{h} - 1\right| & , h > 0 \\ \left|\frac{\sin(h)}{h} - 1\right| & , h < 0 \end{cases} \\ &\leq |h| + \left|\frac{\sin(h)}{h} - 1\right|\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ konvergiert dies gegen 0, also existiert $f'(0) = 1$. Offenbar gilt $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} f'(x) = 1 = f'(0)$, also ist f' auf ganz $\mathbb{R}$ stetig (aber sicherlich nicht differenzierbar).

Aufgabe 8

Da f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, folgt nach dem MWS auf $[n, n+1]$ die Existenz von $a_n \in (n, n+1)$ mit

$$f(n+1) - f(n) = f'(a_n)(n+1-n) = f'(a_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Also $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Andererseits gilt

$$|f'(a_n)| = |f(n+1) - f(n)| \leq |f(n+1) - c| + |f(n) - c|.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ existiert ein $R = R(\varepsilon)$, so dass $|f(x) - c| \leq \varepsilon/2$ für alle $x \geq R$. Also gilt für $n \geq R$

$$|f'(a_n)| \leq |f(n+1) - c| + |f(n) - c| \leq \varepsilon$$

und damit $\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = 0$.

Aufgabe 9

O.B.d.A. sei $\alpha \in (0, 1)$, für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ ist nichts zu zeigen. Betrachte die Funktion

$$f(x) := 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha, \quad x \in (-1, \infty).$$

Wegen $\alpha \notin \{0, 1\}$ ist f auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit

$$f'(x) = \alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = -\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.$$

Also $f'(x) = 0$ genau für $x = 0$. Wegen $f''(0) = -\alpha(\alpha-1) > 0$ hat f bei $x = 0$ ein relatives Minimum. Für $-1 < x < 0$ gilt $1 + x \in (0, 1)$, also $(1+x)^{\alpha-1} > 1$ wegen $\alpha \in (0, 1)$ und damit

$$f'(x) = \alpha(1 - (1+x)^{\alpha-1}) < 0,$$

also ist f dort streng monoton fallend. Für $x > 0$ gilt analog

$$f'(x) = \alpha(1 - (1+x)^{\alpha-1}) > 0,$$

also ist f dort streng monoton wachsend. Daher ist bei $x = 0$ das absolute Minimum $f(0) = 0$, also $f(x) \geq 0$ für $x \in (-1, \infty)$.

Aufgabe 10

Die Funktion kann anschaulich nicht Riemann-integrierbar sein. Es reicht, zu zeigen, dass $\int_* f(x)\,dx < \int^* f(x)\,dx$ gilt. Offenbar gilt $\int_* f(x)\,dx = 0$, denn für jedes $\sigma \in T[0, 1]$ mit $\sigma \leq f$ gibt es bei jeder Treppenstufe $I = (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ ein

$x \in I \setminus \mathbb{Q}$, d. h. $f(x) = 0$ für ein $x \in I$. Also $\sigma \leq 0$. Sei dann $\psi \in T[0,1]$ mit $\psi \geq f$. Es folgt $\psi(x) \geq x$ für alle $x \in [0,1]$. Da die Funktion $g(x) = x$ als stetige Funktion Riemann-integrierbar ist, folgt

$$\int_0^1 \psi(x)\,dx \geq \int_0^1 x\,dx$$

Betrachte jetzt die Treppenfunktion

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Offenbar gilt $g \geq \varphi$, und $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}$. Also $\int_0^1 g(x)\,dx \geq \frac{1}{4}$ und damit $\int^* f(x)\,dx \geq \frac{1}{4}$. Daher kann f nicht Riemann-integrierbar sein.