

Name: .....

**Aufgabe 1:**

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuze dazu die richtigen Antworten an. Es werden keine Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht bewertet. Ist die Gesamtpunktzahl negativ, wird zu Null aufgewertet.

1. Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ . Dann existiert  $\int_1^\infty f(x) dx$ . wahr  falsch
2. Seien  $f, g \in C[a, b]$ . Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ . wahr  falsch
3. Sei  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergent. Dann ist auch der (punktweise) Limes  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  stetig. wahr  falsch
4. Seien  $(M, d_M), (N, d_N)$  metrische Räume und  $f : M \rightarrow N$  stetig. Dann ist für jedes  $y \in N$  die Faser  $f^{-1}(\{y\}) \subset M$  abgeschlossen. wahr  falsch
5. Sei  $(M, d)$  ein kompakter metrischer Raum und  $A \subset M$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  schon kompakt. wahr  falsch
6. Die lineare Abbildung  $T : (C[a, b], \|\cdot\|_{L^\infty}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ , ist stetig. wahr  falsch
7. Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  besitze in  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  alle Richtungsableitungen. Dann ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar. wahr  falsch
8. Jede differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist partiell differenzierbar. wahr  falsch
9. Jede zweimal stetig partiell differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist differenzierbar. wahr  falsch
10. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  differenzierbar. Dann existiert zu  $x, h \in \mathbb{R}^2$  immer ein  $\vartheta \in [0, 1]$  mit  $f(x+h) - f(x) = Df|_{x+\vartheta h}h$ . wahr  falsch

Name: .....

**Aufgabe 2:**

Überprüfe die Existenz folgender Integrale und berechne ggf. deren Werte:

(i)  $\int_1^2 \frac{1}{x \log(x)} dx$

(ii)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$

(10)

Name: .....

**Aufgabe 3:**

Betrachte die Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Bestimme  $D := \{s \in \mathbb{R} \mid \zeta(s) \text{ konvergiert punktweise}\}$  und zeige, dass  $\zeta$  auf  $D$  stetig ist. (10)

Name: .....

**Aufgabe 4:**

Sei  $G \subset \mathbb{R}$  offen,  $x \in G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Zeige mit Hilfe geeigneter Taylorentwicklungen von  $f$  um  $x$ , dass der folgende Grenzwert existiert und berechne ihn:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)}{h^2}$$

(10)

Name: .....

**Aufgabe 5:**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  eine Cauchy-Folge. Zeige, dass die Anzahl der Häufungswerte von  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  immer entweder 0 oder 1 ist. Gib für jede Möglichkeit ein Beispiel an.

(8)

Name: .....

**Aufgabe 6:**

Welche der folgenden Mengen  $K \subset (V, \|\cdot\|_V)$  sind kompakt? Die Antworten sind zu begründen.

(i)  $K := \{(x, f(x))^T \mid x \in [a, b]\} \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

(ii)  $K := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle = 0\} \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$  für ein  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$

(iii)  $K := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y| \leq 3\} \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

(12)

Name: .....

**Aufgabe 7:**

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) := \frac{y - x}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Zeige, dass  $f$  im Punkt  $(x, y)^T = (0, 0)^T$  alle Richtungsableitungen zur Richtung  $v = v(\alpha) := (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , besitzt und berechne diese. Für welche  $\alpha$  wird die Richtungsableitung in  $(x, y)^T = (0, 0)^T$  minimal, maximal bzw. 0?

(10)

Name: .....

**Aufgabe 8:**

Zeige, dass die folgende Abbildung  $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar ist und berechne  $J_f(x)$ :

$$f(x) := (1, \|x\|_2, \dots, \|x\|_2^{d-1})^T.$$

Hinweis: gehe zeilenweise vor.

(10)

Name: .....

Name: .....

Name: .....