Aufgaben

Aufgabe 1

1. Sei $f \in C[a,b]$. Dann existiert ein $F \in C^1[a,b]$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. wahr ☐ falsch ☐
2. Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und monoton fallend. Wenn $\int_0^\infty f(x)\,dx$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$. wahr ☐ falsch ☐
3. Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C[a,b]$. Dann ist auch $f(x) := \sum_{n=0}^\infty f(x)$ stetig. auf $[a,b]$. wahr ☐ falsch ☐
4. Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subset M$ abgeschlossen und $K \subset M$ kompakt. Dann ist $A \cup K$ kompakt. wahr ☐ falsch ☐
5. Sei (M,d) ein metrischer Raum, $O \subset M$ offen und $K \subset M$ kompakt. Dann ist $O \setminus K$ offen. wahr ☐ falsch ☐
6. Sei (M,d) ein metrischer Raum und $K \subset M$ kompakt. Dann ist $(K, d|_{K\times K})$ ein vollständiger metrischer Raum. wahr ☐ falsch ☐
7. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x = (x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, wenn $f(\cdot,x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x_1,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_1 bzw. x_2 stetig sind. wahr ☐ falsch ☐
8. Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}^d$ partiell differenzierbar. Dann besitzt f in x_0 alle Richtungsableitungen. wahr ☐ falsch ☐
9. Jede stetig partiell differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar. wahr ☐ falsch ☐
10. Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}^d$ zweimal partiell differenzierbar. Dann ist $H_f(x_0)$ symmetrisch. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 2

Überprüfe die Existenz folgender Integrale und berechne ggf. deren Werte:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{4x^2+x}{4x^3-4x^2+x-1}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$

Aufgabe 3

Zeige, dass durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n+1}$$

eine stetige Funktion $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ festgelegt ist.

Aufgabe 4

Bestimme mit Hilfe einer geeigneten Taylorentwicklung eine Zahl $z \in \mathbb{Q}$ mit $|z - \sqrt{17}| \leq 10^{-4}$.
Hinweis: $17 = 4^2 + 1$.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Mengen $K \subset (V, \|\cdot\|_V)$ sind kompakt? Die Antworten sind zu begründen.

(i) $K := \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$

(ii) $K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = 3 \right\} \subset \big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\big)$

(iii) $K := \big\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x \geq y^2 \wedge y \geq x^2 \big\} \subset \big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\big)$

Hinweis: Zeichnungen helfen.

Aufgabe 6

Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch. Zeige, dass der durch

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \quad \varrho(x) := \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

gegebene Rayleigh–Quotient $\varrho : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und berechne $\mathrm{grad}\varrho(x)$. Zeige, dass genau dann $\mathrm{grad}\varrho(x) = 0$ gilt, wenn $Ax = \varrho(x)x$.
Hinweis: Schreibe ϱ als Verkettung.

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und $\xi \in \mathbb{R}^d$ ein Fixpunkt von f mit $\|Df|_\xi\| < 1$. Zeige, dass Zahlen $r > 0$ und $q \in (0,1)$ existieren, so dass für alle $x \in B(\xi, r)$ schon $\|f(x) - \xi\|_2 \leq q\|x - \xi\|_2$ gilt.
Bem.: Ein solcher Fixpunkt ξ heißt attraktiv.

Aufgabe 8

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^4(y+1)}{x^2+y^2} & , (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & , (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases} .$$

Zeige, dass f in $(x,y)^T = (0,0)^T$ zweimal partiell differenzierbar ist und berechne $H_f(0,0)$.

Lösungen

Aufgabe 1

1. **wahr**, $F(t) := \int_a^t f(x)\,dx$ gemäß Hauptsatz
2. **wahr**: Es ist $f \geq 0$, sonst würde $\int_0^\infty f(x)\,dx$ nicht existieren (!). Und $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ wegen
$$0 \leq f(t) \leq \int_{t-1}^t f(s)\,ds \leq \int_{t-1}^\infty f(s)\,ds \to 0$$
3. **falsch**, dazu braucht man glm. Konvergenz, vgl. VL
4. **falsch**, $K = [0,1]$, $A = [0,\infty)$, $K \cup A$ nicht kompakt
5. **wahr**, K ist abgeschlossen, also $M\backslash K$ offen, $O\backslash K = O \cap M \setminus K$ offen als Schnitt offener Mengen
6. **wahr**, vgl. VL
7. **falsch**, $f(x,y) := 0$ für $xy = 0$ und 1 sonst ist in $(0,0)^T$ nicht stetig (betrachte Folge $(1/n, 1/n)^T$), aber $f(\cdot,0)$ und $f(0,\cdot)$ sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$
8. **falsch**, vgl. Übung
9. **wahr**, vgl. VL
10. **falsch**, dazu muss f zweimal *stetig* p.db. sein

Aufgabe 2

(i) Wegen
$$4x^3 - 4x^2 + x - 1 = (x-1)(4x^2+1)$$
hat der Integrand auf $[-1,0]$ keine Nullstellen, das Integral existiert als ganz gewöhnliches Integral. Der PBZ-Ansatz
$$\frac{4x^2+x}{4x^3-4x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{4x^2+1}$$
führt nach Mult. mit HN auf
$$A(4x^2+1) + Bx(x-1) + C(x-1) = 4x^2 + x,$$
also
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4A + B &=& 4 \\ -B + C &=& 1 \\ A - C &=& 0 \end{array} \right.$$
und damit $C = 1 = A$, $B = 0$. Damit
$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 \frac{4x^2+x}{4x^3-4x^2+x-1}\,dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{4x^2+1}\,dx \\ &\stackrel{2x=y}{=} \log|x-1|\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}\int_{-2}^0 \frac{1}{y^2+1}\,dy \\ &= -\log 2 + \frac{1}{2}\arctan y\Big|_{-2}^0 \\ &= \frac{1}{2}\arctan 2 - \log 2 \end{aligned}$$

(ii) Kritisch ist die obere Grenze. Für $R \geq 1$ rechnet man mit Substitution $x = e^y$ und anschließender partieller Integration ($u = y$, $v' = e^{-y}$)
$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{\log(x)}{x^2}\,dx &= \int_0^{\log R} ye^{-y}\,dy \\ &= -ye^{-y}\Big|_0^{\log R} + \int_0^{\log R} e^{-y}\,dy \\ &= -\frac{\log R}{R} - e^{-y}\Big|_0^{\log R} \\ &= -\frac{\log R + 1}{R} + 1 \end{aligned}$$
Für $R \to \infty$ strebt $\frac{1}{R}$ sowie $\frac{\log R}{R}$ (l'Hospital) gegen 0, also existiert
$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx = 1$$

Aufgabe 3

Bezeichne $f_n(x) := \frac{1}{x^n+1}$, offenbar ist $f_n \in C(1,\infty)$. Punktweise Konvergenz (und damit Wohldefiniertheit) von $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ ist klar, denn für $x > 1$ gilt $\frac{1}{x^n+1} < \frac{1}{x^n}$, so dass die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n}$ eine Majorante für $f(x)$ ist.
Für die Stetigkeit zeigen wir gleichmäßige Konvergenz auf jedem Intervall $[a,b] \subset (1,\infty)$. Für $x \in [a,b]$ gilt $x \geq a$, also $\frac{1}{x^n+1} \leq \frac{1}{a^n+1}$, also $\|f_n\|_{L_\infty(a,b)} = \frac{1}{a^n+1}$. Also
$$\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_{L_\infty(a,b)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a^n+1} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a^n} < \infty$$
wegen $a > 1$ (geometrische Reihe), und nach dem Weierstraß–Kriterium konvergiert f gleichmäßig auf $[a,b]$. Da f_n stetig auf $[a,b]$, gilt dies auch für f, und mit beliebigem $[a,b] \subset (1,\infty)$ ist f sogar auf $(1,\infty)$ stetig.

Aufgabe 4

Mit dem Hinweis gilt
$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = 4\sqrt{1 + \frac{1}{16}}$$
Mit $f(x) := \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{16}$ also $\sqrt{17} = 4f(x)$. Nach Übung ist die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ gerade
$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \binom{1/2}{n} x^n.$$
In einer Umgebung von x_0 ist f beliebig oft differenzierbar als Verkettung, also gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Taylorformel
$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$
und
$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (0, \frac{1}{16}).$$

In der Aufgabe also speziell

$$\begin{aligned}\left|R_{n+1}(\frac{1}{16})\right| &= \left|\binom{1/2}{n+1}(1+\xi)^{1/2-(n+1)}16^{-(n+1)}\right| \\ &\overset{\xi\in(0,\frac{1}{16})}{\leq} \left|\binom{1/2}{n+1}\right|16^{-(n+1)} =: q_n\end{aligned}$$

Wir bestimmen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q_n \leq \frac{1}{4}\cdot 10^{-4} = \frac{1}{40000}$. Tabelle liefert:

n	$\binom{1/2}{n+1}$	q_n
0	$1/2$	$1/32$
1	$-1/8$	$1/2048$
2	$1/16$	$1/65536 < 1/40000$

Also $n = 2$ und die gesuchte Zahl lautet

$$\begin{aligned} z &:= \binom{1/2}{0}\cdot 1 + \binom{1/2}{1}\cdot\frac{1}{16} + \binom{1/2}{2}\cdot\frac{1}{256} \\ &= 1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{2048} = \frac{2111}{2048}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(i) K ist nicht abgeschlossen, kann also nicht kompakt sein.

(ii) Für $(x,y)^T \in K$ gilt

$$\|(x,y)^T\|_2 \leq \|(1,0)\|_2 + \|(x,y)^T-(1,0)\|_2 \leq 1+3 = 4,$$

also ist K beschränkt. Die Abbildung

$$f : (x,y)^T \mapsto \|(x,y)^T-(-1,0)^T\|_2 + \|(x,y)^T-(1,0)^T\|_2$$

ist stetig als Komposition stetiger Abbildungen, also ist $K = f^{-1}(3)$ als stetiges Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen und damit kompakt nach Heine-Borel.

(iii) K ist beschränkt. Denn für $(x,y)^T \in K$ gilt zunächst $x \geq y^2 \geq 0$ und $y \geq x^2 \geq 0$. Andererseits gilt $x, y \leq 1$. Denn falls $(x,y)^T \in K$ mit $x > 1$, dann gilt $x \geq y^2 \geq (x^2)^2 = x^4$ (Widerspruch). Analog gilt im Fall $(x,y)^T \in K$ mit $y > 1$ $y \geq x^2 \geq (y^2)^2 = y^4$. Also Beschränktheit $\|(x,y)^T\|_2 \leq \sqrt{2}$. Schreibt man

$$K = \{(x,y)^T \mid x \geq y^2\} \cap \{(x,y)^T \mid y \geq x^2\},$$

so identifiziert man K als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen (jeweils stetiges Urbild einer abgeschl. Menge), also abgeschlossen und damit kompakt nach Heine-Borel.

Aufgabe 6

Setze $f(x) := \langle Ax, x\rangle$ und $g(x) := \langle x, x\rangle$. Nach Übung sind sowohl f als auch g differenzierbar mit

$$\mathrm{grad} f(x) = 2x^TA, \quad \mathrm{grad} g(x) = 2x^T.$$

Das ist jeweils noch stetig in x und $g(x) \neq 0$ für $x \neq 0$, also ist $\varrho(x) = f(x)/g(x)$ stetig differenzierbar als Verkettung stetig differenzierbarer Abbildungen s und t

$$\varrho = s \circ t, \quad t(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x)\end{pmatrix}, \quad s(y,z) = y/z.$$

s und t haben die Ableitungen

$$\begin{aligned} Dt|_x = J_t(x) &= \begin{pmatrix}\mathrm{grad} f(x) \\ \mathrm{grad} g(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^TA \\ 2x^T\end{pmatrix}, \\ Ds|_{(y,z)^T} = \mathrm{grad} s(y,z) &= (1/z, -y/z^2).\end{aligned}$$

Also liefert die Kettenregel

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\varrho(x) &= Ds|_{t(x)}Dt|_x \\ &= \left(\frac{1}{\langle x,x\rangle}, -\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle^2}\right)\begin{pmatrix}2x^TA \\ 2x^T\end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\langle x,x\rangle}\left(x^TA - \varrho(x)x^T\right)\end{aligned}$$

Wegen $x \neq 0$ wird also $\mathrm{grad}\varrho(x)$ genau dann Null, wenn $x^TA = \varrho(x)x^T$, oder nach Transponieren $Ax = \varrho(x)x$.

Aufgabe 7

Da $\|J_f(\xi)\| < 1$ und f *stetig* differenzierbar, existiert eine Umgebung U von ξ mit $\|J_f(x)\| \leq (1 + \|J_f(\xi)\|)/2 =: q < 1$ für alle $x \in U$. Da U offen, existiert ein $r > 0$ mit $B(\xi, r) \subset U$. $B(\xi,r)$ ist konvex nach Vorlesung, also liegt für jedes $x \in B(\xi,r)$ die Verbindungsstrecke zwischen ξ und x noch in $B(\xi,r)$. Für $x \in B(\xi,r)$ ist daher der (allgemeine) Mittelwertsatz anwendbar:

$$\begin{aligned}\|f(x)-\xi\|_2 &= \|f(x)-f(\xi)\|_2 \\ &\overset{\text{MWS}}{\leq} \sup_{\theta\in[0,1]}\|Df|_{x+\theta(\xi-x)}\|\|x-\xi\|_2 \\ &\leq q\|x-\xi\|_2\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Für $(x,y)^T \neq (0,0)^T$ gilt lokal nur der erste Zweig, dort ist f eine Verkettung partiell differenzierbarer Funktionen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{4x^3(y+1)(x^2+y^2) - 2x^5(y+1)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^4(x^2+y^2) - 2x^4y(y+1)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Partielle Differenzierbarkeit im Nullpunkt:

$$\begin{aligned}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} &= h \to 0 \quad (h\to 0) \\ \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} &= 0 \to 0 \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

Also $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Für die zweiten partiellen Ableitungen betrachte nur den Nullpunkt:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} &= \frac{4h^5-2h^5}{h^5} = 2 \to 2 \quad (h \to 0) \\ \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} &= 0 \to 0 \quad (h\to 0) \\ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} &= \frac{h^6-0}{h^5} \to 0 \quad (h \to 0) \\ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} &= 0 \to 0 \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

Also $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$.