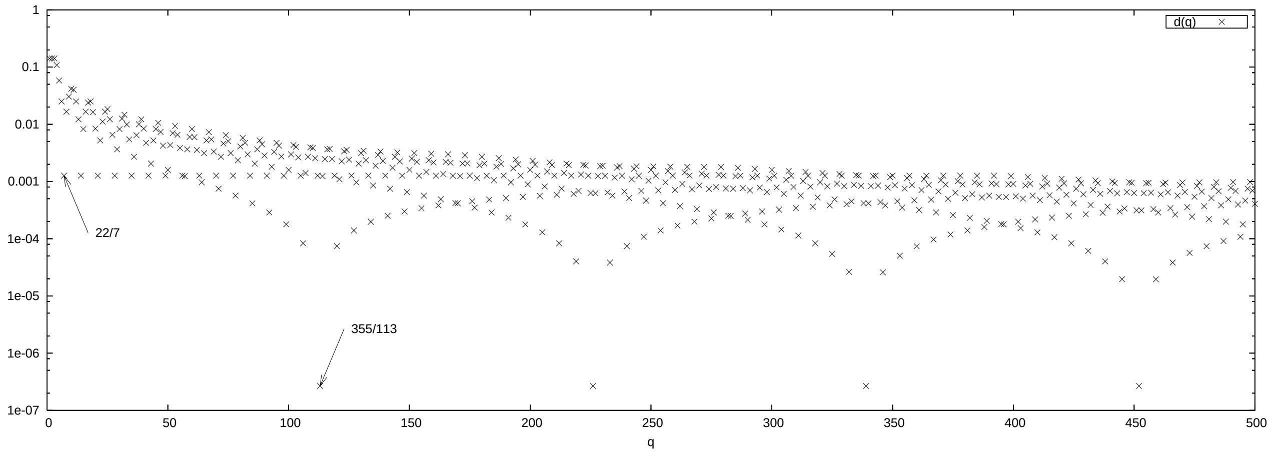
Kurioses zu A16(ii)

Im Rahmen der Aufgabe stellt sich die Frage, was eigentlich die *besten* rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ zur Approximation von π bzw. einer anderen irrationalen Zahl wie e oder $\sqrt{2}$ sind. D.h., ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrational und $\varepsilon > 0$ gegeben, welches ist diejenige rationale Zahl $\frac{p}{q}$ mit kleinstem Nenner q und $|\frac{p}{q} - x| \leq \varepsilon$? Es ist klar, dass mit $\varepsilon \to 0$ auch $q \to \infty$ gilt, aber wie hängt dies von x ab? Gibt es irrationale Zahlen, die sich "besser" durch rationale Zahlen approximieren lassen als andere? Zu diesem Zweck sei

$$d(q) := \inf \left\{ \left| \frac{p}{q} - x \right| : p \in \mathbb{Z} \right\}$$

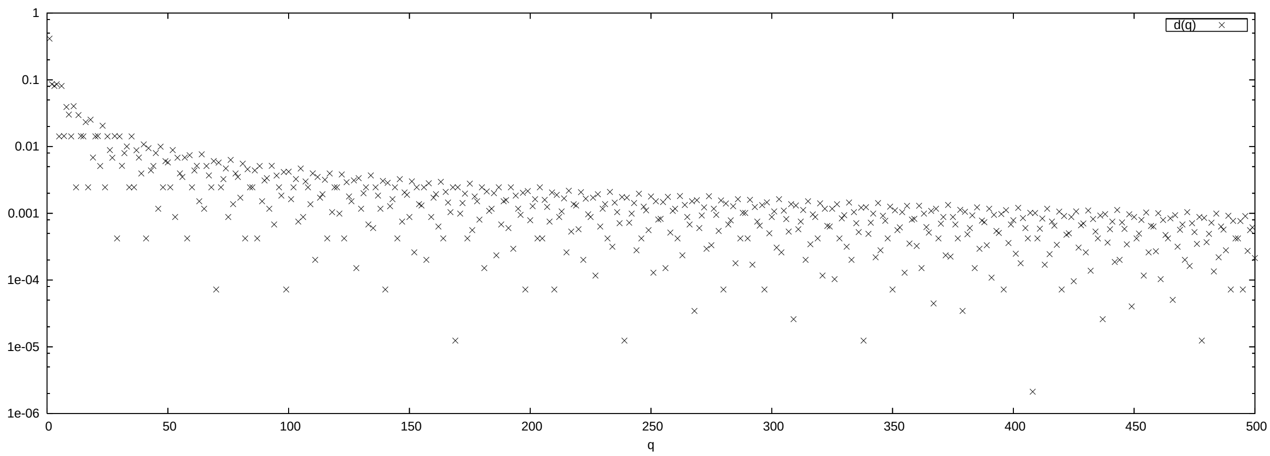
der Minimalabstand bei der Approximation von x durch rationale Zahlen mit Nenner $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Der Abstand wird offenbar jeweils bei einer bestimmten Zahl $\frac{p}{q}$ angenommen. Trägt man $d(q)$ gegen q in eine Grafik ein, so ergibt sich z.B. für $\boxed{x = \pi}$ folgendes Bild:



- Klar erkennbar ist $\lim\limits_{q \to \infty} d(q) = 0$ am oberen "Rand" des Graphen, d.h. mit wachsendem Nenner q läßt sich π immer besser durch Zahlen $\frac{p}{q}$ approximieren.

- Kurios sind die beiden markierten Zahlen $\frac{22}{7}$ und $\frac{355}{113}$. Sie sind erstaunlich gute Approximationen von π und schon seit der Antike bekannt. Insbesondere $\frac{355}{113}$ ist bereits sehr genau, der absolute Fehler $\left|\frac{355}{113} - \pi\right|$ erreicht fast einfache Maschinengenauigkeit (`float`, $\sim 10^{-8}$). Noch interessanter ist, dass sogar $d(113) \leq d(q)$ für $q \leq 16603$ gilt (in der Grafik nicht mehr sichtbar), d.h. unter allen rationalen Zahlen mit Nenner $q \leq 16603$ findet sich *keine* bessere Approximation von π als $\frac{355}{113}$!

- Interessant ist, dass obige Grafik für andere irrationale Zahlen, z.B. $\boxed{x = \sqrt{2}}$, deutlich anders aussieht. Es gibt dort nicht für kleine q bereits so signifikant gute Approximationen $\frac{p}{q}$:



Der Quellcode zum Erzeugen dieser Grafiken steht für eigene Experimente auf der Analysis II-Homepage zum Download bereit (C++, benötigt GNUplot).