

Probeklausur zur Analysis II (Dauer: ca. 2.5h)

Aufgabe 1

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (Bewertung wie üblich).

1. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F(t) := \int_a^t f(x) dx$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar. wahr falsch
2. Sei $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ stetig und streng monoton fallend. Dann existiert $\int_0^\infty f(x) dx$. wahr falsch
3. Jede punktweise konvergente Funktionenfolge $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert auch gleichmäßig auf $[a, b]$. wahr falsch
4. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $K \subset M$ kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Dann ist $K \cup A$ kompakt. wahr falsch
5. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $O \subset M$ offen und $A \subset M$ abgeschlossen. Dann ist $O \setminus A$ offen. wahr falsch
6. Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume und $f : M \rightarrow N$ stetig. Dann ist für jede abgeschlossene Menge $A \subset M$ auch $f(A) \subset N$ abgeschlossen. wahr falsch
7. Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume und $f : M \rightarrow N$ stetig. Dann ist für jede kompakte Menge $K \subset M$ die Menge $f(K) \subset N$ abgeschlossen. wahr falsch
8. Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig. wahr falsch
9. Jede partiell differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar. wahr falsch
10. Jede stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig partiell differenzierbar. wahr falsch

(10)

Aufgabe 2

Überprüfe die Existenz folgender Integrale und berechne ggf. deren Werte:

- (i) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1} dx$
- (ii) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

(10)

Aufgabe 3

Sei $f(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{1-x^n}$. Bestimme $D := \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ konvergiert punktweise}\}$. Zeige, dass f auf D stetig ist.

(10)

Aufgabe 4

Bestimme mit Hilfe einer geeigneten Taylorentwicklung eine Zahl $\xi \in \mathbb{Q}$, so dass $|\xi - \frac{1}{2} \sqrt[5]{34}| \leq 10^{-3}$.

(12)

Aufgabe 5

Welche der folgenden Mengen $K \subset (V, \|\cdot\|_V)$ sind kompakt? Die Antworten sind zu begründen.

- (i) $K := \{x \in \mathbb{R} \mid e^x = x^2\} \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$
- (ii) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 1 \wedge y \geq x^3 - 2x\} \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$
- (iii) $K := \left\{f \in C[a, b] \mid \|f\|_{L^\infty} \leq 2 \wedge \int_a^b f(x) dx > 0\right\} \subset (C[a, b], \|\cdot\|_{L^\infty})$

(9)

Aufgabe 6

Sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : [a, b] \rightarrow U$ eine stetige Kurve. Zeige, dass die Kurve f dem Rand von U nicht beliebig nahe kommt:

$$\inf\{\|f(x) - y\|_2 \mid x \in [a, b], y \in \text{Rd}(U) := \overline{U} \setminus \overset{\circ}{U}\} > 0$$

(10)

Aufgabe 7

Zeige, dass die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz \mathbb{R}^2 differenzierbar ist und berechne $\text{grad}f(x, y)$:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(12)

Aufgabe 8

Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine reguläre Kurve, d.h. stetig differenzierbar und $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Ferner sei $f(g(a)) = f(g(b))$. Zeige, dass trotz $g'(t) \neq 0$ ein $s \in (a, b)$ existiert mit

$$\text{grad}f(g(s))g'(s) = 0.$$

(6)

Lösungen

Aufgabe 1

1. **wahr:** Hauptsatz der Differential-/Integralrechnung
2. **falsch:** $f(x) = \frac{1}{x+1}$
3. **falsch:** $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1]$
4. **falsch:** $M = \mathbb{R}, K = [0, 1], A = \mathbb{R}$
5. **wahr:** $O \setminus A = O \cap (M \setminus A)$ offen als Schnitt endlich vieler offener Mengen
6. **falsch:** $f(x) = e^x, f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ nicht abgeschlossen
7. **wahr:** $f(K)$ ist kompakt wegen Stetigkeit, also insbesondere abgeschlossen
8. **wahr:** Jede lineare Abbildung zwischen endlich-dim. normierten Räumen ist beschränkt, also stetig.
9. **falsch:** siehe A36
10. **wahr:** Das ist sogar äquivalent, siehe VL.

Aufgabe 2

- (i) $f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$ ist auf $[2, \infty)$ stetig, kritisch bei der Integration ist nur ∞ . Für $R \geq 2$:

$$\begin{aligned} 2 \int_2^R f(x) dx &= \int_2^R \frac{1}{x-1} dx - \int_2^R \frac{1}{x+1} dx \\ &= \log(R-1) - \log(R+1) + \log 3 \\ &= \log \frac{R-1}{R+1} + \log 3 \\ &\rightarrow \log 3 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Also existiert $\int_2^\infty f(x) dx = \frac{1}{2} \log 3$.

- (ii) $f(x)$ ist stetig auf $(0, 1]$, $\lim_{x \searrow 0} = +\infty$. Also ist $x = 0$ kritisch. Für $R > 0$:

$$\begin{aligned} \int_R^1 f(x) dx &= \int_R^1 \sqrt{x} dx + \int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_{x=R}^1 + 2x^{1/2} \Big|_{x=R}^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} R^{3/2} + 2 - 2R^{1/2} \\ &\rightarrow \frac{8}{3} \quad (R \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Also existiert $\int_0^1 f(x) dx = \frac{8}{3}$.

Aufgabe 3

Offenbar kann man f bei $x \in \{\pm 1\}$ nicht so definieren. Für $|x| > 1$ gilt $\left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| \rightarrow 1 \neq 0$, also konvergiert $f(x)$ nicht. Für $|x| < 1$ QK:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}(1-x^n)}{(1-x^{n+1})x^n} \right| = |x| \left| \frac{x^n-1}{x^{n+1}-1} \right|$$

Für $|x| < 1$ gilt $x^n \rightarrow 0$, also $\left| \frac{x^n-1}{x^{n+1}-1} \right| \rightarrow 1$. Und wegen $|x| < 1$ gilt für große n $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, also konvergiert $f(x)$ (sogar absolut). Demnach $D := (-1, 1)$. Sei $[a, b] \subset D$ beliebig, wir zeigen glm. Konvergenz von f auf $[a, b]$. Es reicht z.z., dass $f_k(s) := \sum_{\ell=1}^k \frac{x^\ell}{1-x^\ell}$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_{L^\infty}$ bildet. Sei o.B.d.A. $m \geq n$ und $x \in [a, b]$ beliebig. Wegen $x \in [a, b]$ gilt $|x| \leq \max\{|a|, |b|\} =: M < 1$. Also auch $|x|^k \leq |x|$ und damit $1 - |x|^k \geq 1 - M$. Damit rechnet man

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{x^k}{1-x^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{|x|^k}{|1-x^k|} \\ &\stackrel{|c-d| \geq |c|-|d|}{\leq} \sum_{k=n+1}^m \frac{M^k}{1-|x|^k} \leq (1-M) \sum_{k=n+1}^m M^k. \end{aligned}$$

Als Reihenrest der geometrischen Reihe wird dies für $m \geq n \geq N \rightarrow \infty$ beliebig klein. Also konvergiert f gleichmäßig auf $[a, b]$. Als gleichmäßig konvergente Summe stetiger Funktionen ist auch f stetig auf $[a, b]$. Da $[a, b]$ beliebig war, ist f auch auf D stetig.

Aufgabe 4

Wegen

$$\frac{1}{2} \sqrt[5]{34} = \left(\frac{34}{32} \right)^{1/5} = \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{1/5}$$

ist $\frac{1}{2} \sqrt[5]{34}$ der Wert der Funktion $f(x) := (1+x)^{1/5}$ an der Stelle $x := \frac{1}{16}$. Nach Übung gilt die Taylorentwicklung mit $x_0 := 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/5}{n} x^n.$$

Wegen

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{5} - (n-1) \right) (1+x)^{1/5-n} \\ &= n! \binom{1/5}{n} (1+x)^{1/5-n} \end{aligned}$$

gilt für das Restglied $R_{n+1}(x)$ in der Taylor-Approximation

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

die Abschätzung ($\xi \in (x_0, x)$, vgl. Übung)

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \\ &\stackrel{\text{hier}}{=} \left| \binom{1/5}{n} (1+\xi)^{1/5-(n+1)} \frac{1}{16^{n+1}} \right| \\ &\leq \left| \binom{1/5}{n} \right| \frac{1}{16^{n+1}} =: q_n \end{aligned}$$

Tabelle liefert die Lösung:

n	$\binom{1/5}{n+1}$	q_n
0	$1/5$	$1/80$
1	$-2/25$	$1/3200 < 1/1000$

Also $n = 1, \xi := \binom{1/5}{0} \cdot 1 + \binom{1/5}{1} \cdot \frac{1}{16} = \frac{81}{80}$.

Aufgabe 5

- (i) K ist abgeschlossen als Urbild von $\{0\}$ unter $f(x) := e^x - x^2$. K ist auch beschränkt, denn für $x < -1$ gilt $e^x < \frac{1}{e} < 1 < x^2$, für $x \geq 0$ gilt immer $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \geq \frac{1}{6}x^3$. Und für $x > 6$ gilt $\frac{1}{6}x^3 > x^2$. Also $K \subset [-6, 6]$, damit ist K abgeschlossen und beschränkt, daher kompakt nach Heine-Borel.
- (ii) Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $x^3 - 2x \rightarrow -\infty$, also gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$ $(-n, -n^3 + 2n) \in K$, K kann nicht beschränkt sein.
- (iii) K ist zwar beschränkt, aber nicht abgeschlossen (Vorsicht: selbst das wäre nur notwendig für Kompaktheit, nicht hinreichend, da wir nicht im \mathbb{R}^d sind!). Wähle einfach $f_n := \frac{1}{n}$ auf $[a, b]$. Das konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_{L^\infty}$ gegen $0 \notin K$.

Aufgabe 6

Da $K := [a, b]$ kompakt in \mathbb{R} , ist auch $f(K) \subset U \subset \mathbb{R}^d$ kompakt in \mathbb{R}^d , da f stetig. Zu $z := f(x) \in f(K)$ existiert je ein $r = r(x)$ mit $B(f(x), r(x)) \subset U$. Alle solchen offenen Mengen bilden eine Überdeckung von $f(K)$. Da $f(K)$ kompakt, reichen hierfür endlich viele $B_i := B(f(x_i), r(x_i))$ aus mit $1 \leq i \leq n$. Da U offen, gilt $\text{Rd}U \cap B_i = \emptyset$, also gilt für alle $x \in [a, b]$ und $y \in \text{Rd}U$ die Abschätzung

$$\|f(x) - y\|_2 \geq \min_{1 \leq i \leq n} r(x_i) =: m$$

Die rechte Seite hängt nicht von x, y ab, also gilt die Abschätzung auch noch für das Infimum, f kann niemals den Rand von U berühren.

Aufgabe 7

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt lokal nur der erste Zweig, dort ist f stetig differenzierbar (und damit differenzierbar), denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{3x^2\sqrt{x^2+y^2} - x^3\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{2x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-x^3\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Differenzierbarkeit in $(0, 0)$: Wir zeigen zunächst, dass f dort auch partiell differenzierbar ist:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{\sqrt{h^2}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{aligned}$$

f ist sogar auf ganz \mathbb{R}^2 stetig partiell differenzierbar, denn für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| &= \frac{2x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \frac{3x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq 3\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\ &= 3\sqrt{x^2+y^2} = 3\|(x, y)^T\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| &= \frac{|x|^3|y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2+y^2)|x||y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{|x||y|}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\ &= \|(x, y)^T\|_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also ist f stetig partiell differenzierbar auf ganz \mathbb{R}^2 , daher sogar stetig differenzierbar.

Aufgabe 8

$h := f \circ g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig diff'bar (Verkettung!) mit $h(a) = h(b)$. Also nach dem Satz von Rolle $h'(s) = 0$ für ein $s \in (a, b)$. Andererseits gilt nach Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h(t) &= J_f(g(t))J_g(t) \\ &= \text{grad}f(g(t))g'(t) \end{aligned}$$

Also $\text{grad}f(g(s))g'(s) = 0$ für ein $s \in (a, b)$, obwohl g regulär ist.