Fachbereich Mathematik und Informatik SS 2004
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke Thorsten Raasch

12. Übungsblatt zur Analysis II (Bonusblatt)
Abgabe: 13.7.2004, 9 Uhr

Aufgabe 45:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & , \quad (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$$

Zeige, dass f in $(x,y)^T = (0,0)^T$ zweimal partiell differenzierbar ist und berechne $H_f(0,0)$. Ist $H_f(0,0)$ symmetrisch? (4)

Aufgabe 46:

Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Raum. Zeige die in der Vorlesung benutzte Tatsache, dass die Abbildung

$$T : L(\mathbb{R}^d, V) \longrightarrow V^d,\ T\varphi := (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_d))^T$$

ein linearer Homöomorphismus (also insbesondere stetig und stetig invertierbar) ist. (4)

Aufgabe 47:

Seien $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und für $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ sei

$$L_r(V,W) := \{\varphi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r-\text{mal}} \longrightarrow W \text{ linear, stetig}\}.$$

Zeige die in der Vorlesung benutzte Tatsache, dass die Abbildung

$$T : L(V, L_r(V,W)) \longrightarrow L_{r+1}(V,W), \quad (T\varphi)(v_1, \ldots, v_{r+1}) := \varphi(v_1)(v_2, \ldots, v_r)$$

ein linearer Homöomorphismus ist. (4)

Aufgabe 48:

Seien $f, g : \mathbb{R}^d \supset G \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal partiell differenzierbar. Zeige, dass dann das punktweise Produkt $fg : G \longrightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls in G n-mal partiell differenzierbar ist und die Leibniz-Regel gilt:

$$\forall x \in G\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = n : \partial^\alpha(fg)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f(x) \partial^\beta g(x).$$

Hier ist $\beta \leq \alpha$ und $\alpha - \beta$ komponentenweise zu verstehen, $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}$. (4)