Geometrische und analytische Eigenschaften von Hyperflächen in der Eguchi–Hanson–Metrik

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades
d o c t o r   r e r u m   n a t u r a l i u m
(Dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin

von
Dipl.-Phys. Pablo Ramacher
geboren am 30. Juli 1972 in Freiburg im Breisgau

Der Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Jürgen Mlynek

Der Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Prof. Dr. Bodo Krause

Erster Gutachter: Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Eichhorn
Dritter Gutachter: Prof. Dr. Helmut Friedrich

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Oktober 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung v

Teil 1. Hyperflächen in der Eguchi–Hanson–Metrik und deren Geometrie 1
1. Der Eguchi–Hanson-Raum $(T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), g_t)$ 1
2. Hyperflächen in $(T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), g_t)$ und deren innere Geometrie 6
3. Die zweite Fundamentalform der Hyperflächen M^3_Γ 12
4. Der geodätische Fluß der Hyperflächen M^3_Γ 28

Teil 2. Das Spektrum des Dirac– und des Laplace–Operators 35
1. Integrale subharmonischer Funktionen auf den Hyperflächen M^3_Γ 35
2. Einstein– und T–Killing–Spinoren auf den Hyperflächen M^3_Γ 38
3. Das Spektrum des Dirac–Operators 45
4. Das Spektrum des Laplace–Operators 58

Literaturverzeichnis 63

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Spektralgeometrie gewisser Familien von Hyperflächen, welche als komplexe Linienbündel im Eguchi–Hanson–Raum über Kurven auf $S^2 \simeq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ entstehen. Es handelt sich dabei um dreidimensionale, asymptotisch flache Riemannsche Mannigfaltigkeiten nicht positiver Skalarkrümmung, welche für den Fall einer geschlossenen Kurve in Hopf–Tori geblättert sind. Wir beschreiben deren Geometrie im Detail, indem wir den vollständigen dreidimensionalen Krümmungstensor und die zweite Fundamentalform berechnen. Desweiteren treffen wir einige Aussagen über die Struktur des geodätischen Flusses. Da die geometrischen Eigenschaften dieser Hyperflächen explizit beschrieben werden können, ist man in der Lage, präzise Aussagen über die Spektren des Laplace– und des Dirac–Operators sowie über die Existenz von Lösungen spinorieller Feldgleichungen auf diesen Hyperflächen zu treffen. Insbesondere werden wir zeigen, daß für beliebige Kurven und $p \geq 1$ keine L^p–harmonischen Funktionen existieren können und daß im Fall von Kurven, welche mittels Möbius-Transformationen aus geschlossenen Kurven hervorgehen, die Spektren des Laplace– und des Quadrates des Dirac–Operators beliebig nahe an null heranreichen und demzufolge Null im Spektrum der betrachteten Operatoren liegt. Wie sich herausstellt, ist Null in diesem Fall auch Spektralwert des Dirac–Operators selbst. Für den Fall, daß die betrachteten Kurven verallgemeinerte Kreise in $\mathbb{C}$ sind, welche durch Möbius–Transformationen aus Kreisen in $\mathbb{C}$ um den Ursprung hervorgehen, kann der L^2–Kern des Dirac–Operators im Sinne der Spektraltheorie berechnet werden und wir zeigen, daß dieser trivial ist. Die Untersuchungen in dieser Arbeit zeigen, daß die betrachteten Hyperflächen keine Lösungen des Einstein–Dirac–Systems zulassen; derartige Lösungen können nur durch Deformation in eine singuläre Situation hinein erhalten werden. Es können jedoch explizite Beispiele von Lösungen einer verallgemeinerten Killing–Gleichung für Spinoren, sogenannte T–Killing–Spinoren, konstruiert werden.

Hopf–Tori sind in der Literatur eingehend studiert worden [**25**], und wurden zuerst von Pinkall untersucht [**20**]. Bezeichnet $\pi : S^3 \to S^2$ die Hopf–Faserung, so ist das Urbild einer jeden geschlossenen Kurve in S^2 ein immergierter Torus in S^3; derartige Tori werden *Hopf–Tori* genannt. Mittels solcher Tori zeigte Pinkall, daß jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht eins konform als ein flacher Torus in die Einheitssphäre S^3 eingebettet werden kann. Als eine weitere Anwendung und unter Verwendung elastischer Kurven in S^2 konstruierte er neue Beispiele von kompakten, eingebetteten Willmore–Flächen in $\mathbb{R}^3$. Besagte Flächen sind Extremalpunkte des Willmore–Funktionals $\int \mathfrak{H}\, dA$, wobei $\mathfrak{H}$ die mittlere Krümmung bezeichnet.

Die Eguchi–Hanson–Metrik ist eine vierdimensionale Metrik, die in dem Totalraum der Faserung $p : T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ konstruiert werden kann und deren Holonomiegruppe in SU(2) enthalten ist; sie ist somit Ricci–flach und selbstdual. Sowohl die Hopf–Faserung π als auch die Projektion p sind kompatibel mit der Wirkung von U(2) in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, und, gleich der Standard–Metrik in S^3, ist die Eguchi–Hanson–Metrik invariant unter dieser Wirkung. Deshalb entspricht deren Einschränkung auf den dreidimensionalen reell projektiven Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, welcher in $\mathrm{T}^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ als die Menge aller Kotangentialvektoren der Länge eins enthalten ist, genau der Standard–Metrik in S^3. Aus diesem Grund ist die Projektion p eine geometrische Erweiterung der Hopf–Faserung, und als Urbild einer beliebigen geschlossenen Kurve auf S^2 unter der Projektion p entsteht eine dreidimensionale, nicht kompakte, in Hopf–Tori geblätterte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Deren Ende ist vom topologischen Typ $T^2 \times (0,\infty)/\{\pm 1\}$, wobei T^2 den zweidimensionalen Torus bezeichnet. Das entsprechende Willmore–Funktional bleibt jedoch unbeschränkt und die betrachteten Hyperflächen sind der Integralgeometrie somit nicht zugänglich. Das Interesse an der Eguchi–Hanson–Metrik selbst geht auf ein Resultat von Schoen und Yau zurück [**21**], welches besagt, daß eine vollständige, asymptotisch euklidische, vierdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Ricci-Tensor verschwindet, notwendig flach sein muß. Für asymptotisch lokal euklidische Kähler–Metriken mit verschwindendem Ricci–Tensor trifft eine entsprechende Aussage jedoch nicht zu, und die Eguchi–Hanson–Metrik stellte das erste Beispiel einer solchen Metrik dar [**4**].

Wir geben nun die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit wieder. Sie ist in zwei Teile gegliedert. Der erste Teil ist der Geometrie der betrachteten Hyperflächen gewidmet, der zweite, dem Spektrum des Laplace– und des Dirac–Operators auf besagten Hyperflächen sowie der Untersuchung spinorieller Feldgleichungen. Zur Konstruktion der Eguchi–Hanson-Metrik in Teil 1, Abschnitt 1 identifizieren wir das Kotangentialbündel des komplex projektiven Raumes $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit dem Quadrat H^2 des kanonischen Bündels und realisieren den Totalraum als die Menge aller Äquivalenzklassen von Tripeln $[\alpha,\beta,\gamma]$ bezüglich der Äquivalenzrelation $(\alpha,\beta,\gamma) \sim_1 (A\alpha, \mathcal{A}\beta, \gamma/A^2)$, $A \in \mathbb{C}^*$, wobei $[\alpha : \beta]$ homogene Koordinaten in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sind und γ eine komplexe Zahl ist. Die Eguchi–Hanson–Metrik ist dann durch das Kähler–Potential

$$f_t := \sqrt{u_1^2 + t^4} + t^2 \log \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + t^4} + t^2}, \quad t > 0,$$

gegeben, wobei $u_1 : H^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $u_1([\alpha,\beta,\gamma]) = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)|\gamma|$ ist. Außerhalb der exzeptionellen Kurve, also des Nullschnittes, ist u_1 eine $\mathbb{C}^\infty$–Funktion, und dasselbe gilt für f_t. Die zu f_t gehörige Form $\omega_t = i\,\partial\overline{\partial}\,f_t$ ist sogar auf dem Nullschnitt regulär und definiert somit eine Kähler–Form auf ganz H^2. Für eine beliebige, auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $\Gamma(s) = r(s)e^{i\varphi_\Gamma(s)}$ in $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ betrachten wir dann deren Urbild

$$M_\Gamma^3 := p^{-1}(\Gamma) = \left\{[\Gamma(s), 1, \gamma] \in H^2 : \gamma \in \mathbb{C}\right\},$$

und erhalten eine Familie von Hyperflächen (M_Γ^3, h_t), wobei h_t die induzierte Riemannsche Metrik bezeichnet. Jede dieser Hyperflächen ist ein komplexes Linienbündel über Γ und mittels Einführung von Polarkoordinaten $\sqrt{\gamma} = \varrho e^{i\varphi}$ in jeder Faser erhalten wir eine Parametrisierung von M_Γ^3 außerhalb des Nullschnittes durch die Koordinaten s, ϱ, φ, siehe Abschnitt 2; da die Koeffizienten von h_t nicht von φ abhängen, ist die entsprechende S^1–Wirkung eine Isometrie. Wir bestimmen die innere Geometrie dieser Hyperflächen und in Satz 1.1 auf Seite 10 wird der vollständige Ricci–Tensor bezüglich eines außerhalb der Ausnahmekurve globalen Schnittes im Reperbündel berechnet. Ein Eigenwert ist positiv, ein zweiter negativ und der dritte wird negativ für große Abstände ϱ und r. Für die Skalarkrümmung ergibt sich der Ausdruck

$$S = -\frac{\varrho^4(r^2+1)^2}{(\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4)^{3/2}}.$$

Sie ist für $\varrho > 0$ strikt negativ und geht für große ϱ und r wie $1/\varrho^2(r^2+1)$ gegen null. Für $t \neq 0$ bleibt S bei $\varrho = 0$ regulär und verschwindet somit längs des Nullschnittes. In Abschnitt 3 wenden wir uns der Untersuchung des Levi–Civita–Zusammmenhangs des Eguchi–Hanson-Raums zu und berechnen die zweite Fundamentalform II der Hyperflächen M^3_Γ; wir erhalten für deren Komponenten bezüglich des erwähnten Orthonormalrepers

$$\mathrm{II}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K}{4\varrho}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}} \\ 0 & \frac{K}{4\varrho}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}} & \mathfrak{H} \end{pmatrix},$$

siehe Satz 1.2 auf Seite 23 sowie Korollar 1.1 auf Seite 26. Dabei bezeichnet K die Funktion $K = 2\varrho^2(r^2+1)/\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}$ und $\mathfrak{H}$ die mittlere Krümmung. Sie ist durch die geodätische Krümmung k_g von Γ, aufgefaßt als eine Kurve in S^2, gemäß der Formel

$$\mathfrak{H} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}} \cdot k_g$$

gegeben. Dies erscheint natürlich, da die Geometrie des Vektorbündels $T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ durch die elliptische Geometrie von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ bestimmt ist. Desweiteren impliziert obige Formel, daß M^3_Γ genau dann eine Minimalfläche ist, falls $k_g = 0$, also Γ ein Großkreis in S^2 ist. Da weiter die Funktion $\varrho^2(r^2+1)$ der Entfernung in $\mathrm{T}^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ entspricht, sind sowohl die Skalarkrümmung S und die mittlere Krümmung $\mathfrak{H}$ sowie sämtliche Komponenten des Ricci–Tensors und der zweiten Fundamentalform offenkundig invariant unter der Wirkung der Isometriegruppe $\mathrm{U}(2)$. Der Abschnitt 4 enthält schließlich einige Bemerkungen zur Struktur des geodätischen Flusses der Hyperflächen M^3_Γ. So berechnen wir für den Fall, daß Γ ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Radius $r(s) = r_0$ ist, den Abstand eines Punktes in M^3_Γ mit den Koordinaten $s_0, \varrho_0, \varphi_0$ zu der Kurve $\Gamma \subset M^3_\Gamma$ und erhalten

$$\mathrm{dist}\,(p_0, \Gamma) = \frac{1}{t\sqrt{2}}\varrho_0^2(r_0^2+1)\mathcal{F}\Big(1/2, 1/4, 3/2, -\frac{\varrho_0^4(r_0^2+1)^2}{t^4}\Big),$$

siehe Proposition 1.11 auf Seite 31; dabei bezeichnet $\mathcal{F}$ die hypergeometrische Funktion. In dieser Situation kann dann das exponentielle Wachstum von M^3_Γ explizit bestimmt werden.

In Abschnitt 1 von Teil 2 wird für $p \geq 1$ das Verschwinden des L^p–Kerns des Laplace–Operators auf den Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) für jedes $t \geq 0$ und beliebige Kurven Γ bewiesen, indem die Existenz einer kanonischen ausschöpfenden Funktion auf den betrachteten Hyperflächen, siehe Proposition 2.2 und Korollar 2.1 auf Seite 37, gezeigt wird. Das Resultat folgt dann aus Ergebnissen von Greene und Wu [**10**], die Integrale gewisser verallgemeinerter subharmonischer Funktionen auf zusammenhängenden, nicht kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten, welche eine solche Funktion zulassen, untersuchten und zeigten, daß besagte Integrale nicht beschränkt bleiben können. Für den kleinsten Spektralwert des Laplace–Operators auf Funktionen erhalten wir in Abschnitt 4 die erste Abschätzung

$$\mu_0(M^3_\Gamma) \leq t^{-2}, \qquad t > 0,$$

wobei Γ eine geschlossene Kurve ist, siehe Korollar 2.2 auf Seite 59, da allgemein untere Schranken für den Ricci–Tensor einer offenen, vollständigen Mannigfaltigkeit obere Schranken für den kleinsten Spektralwert des Laplace–Operators implizieren [**5**]. Unter

Verwendung des min–max–Prinzips sind wir dann in der Lage, das Infimum des Spektrums des Abschlusses des Laplace–Operators Δ auf (M^3_Γ, h_t) zu bestimmen, und erhalten

$$\inf \sigma(\overline{\Delta}) < \delta$$

für jedes $\delta > 0$ und beliebige $t > 0$ und geschlossene Kurven Γ. Demnach ist $\mu_0(M^3_\Gamma) = 0$. Aufgrund der Tatsache, daß Null kein L^2–Eigenwert sein kann, folgt somit $0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\overline{\Delta})$. Ein Resultat von Brooks [**3**] impliziert dann, daß in diesem Fall die Hyperflächen M^3_Γ von subexponentiellem Wachstum sein müssen.
Abschnitt 2 ist dem Studium spinorieller Feldgleichungen gewidmet. In [**8**] zeigten Friedrich und Kim, daß in Dimension 3 die Existenz einer Lösung des Einstein–Dirac–Systems äquivalent zur Existenz eines sogenannten schwachen Killing–Spinors oder WK–Spinors ist. Für die Existenz eines solchen Spinors bestimmten sie wiederum geometrische Integrabilitätsbedingungen, die unabhängig von der zugrundeliegenden Spin–Struktur sind, und wir zeigen, daß für $t > 0$ diese Bedingungen niemals erfüllt sein können. Somit können keine Lösungen des Einstein–Dirac–Systems auf den Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) für beliebige $t > 0$ und Kurven Γ, siehe Proposition 2.4 auf Seite 40, existieren. Nichtsdestotrotz können solche Lösungen im Fall $t = 0$ und bezüglich der trivialen Spin–Struktur explizit konstruiert werden, doch sind die betrachteten Mannigfaltigkeiten dann nicht mehr vollständig. Hingegen können für den Fall, daß M^3_Γ eine Minimalfläche ist, Lösungen von weniger restriktiven spinoriellen Feldgleichungen, sogenannten T–Killing–Spinoren, bestimmt werden. Dabei wird von der Tatsache, daß die Eguchi–Hanson–Metrik selbstdual ist, Gebrauch gemacht, was zur Folge hat, daß ein paralleler Spinor auf dem Eguchi–Hanson–Raum existiert. Durch Einschränkung dieses Spinors auf die Hyperflächen $M^3_\Gamma \subset T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ zeigen wir dann in Proposition 2.6 auf Seite 45, daß ein T–Killing–Spinor auf M^3_Γ genau dann existiert, wenn M^3_Γ eine Minimalfläche ist. Für ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M^3_\Gamma)$ genügt dann ein solcher Spinor ψ^* der Feldgleichung

$$\nabla_X \psi^* = -\frac{1}{2}\hat{T}_{\psi^*}(X) \cdot \psi^* = -\frac{1}{2}\,\mathrm{II}(X) \cdot \psi^*,$$

wobei $\hat{T}_{\psi^*}(X)$ das durch ψ^* definierte normalisierte Energie–Impuls–Tensorfeld bezeichnet und $\mathrm{II}(X)$ die zweite Fundamentalform, aufgefaßt als Endomorphismus im Tangentialbündel, darstellt. Die zugrundeliegende Spin–Struktur ist nach Konstruktion die induzierte. Das Spektrum des Dirac–Operators D wird in Abschnitt 3 untersucht. Durch Auffinden von oberen Schranken für den Rayleigh–Quotienten und mittels abermaliger Benutzung des min–max–Prinzips zeigen wir, daß das Infimum des Spektrums von $\overline{\mathrm{D}}^2$ auf (M^3_Γ, h_t) für den Fall, daß Γ eine geschlossene Kurve ist, beliebig klein wird; es gilt

$$\inf \sigma(\overline{\mathrm{D}}^2) < \delta$$

für jedes $\delta > 0$, siehe Satz 2.2 auf Seite 46. Der Parameter $t > 0$ ist dabei beliebig und die betrachtete Spin–Struktur ist die triviale. Mittels der expliziten Konstruktion einer approximierenden Folge ergibt sich in diesem Fall zudem, daß $0 \in \sigma(\overline{\mathrm{D}})$. Ist Γ ein Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung, so hängen die Koeffizienten von h_t weder von φ noch von s ab, und es liegt eine isometrische $S^1 \times S^1$–Wirkung vor. Der L^2–Kern des Dirac–Operators sowie der des Abschlusses zerfällt dann in die unitären Darstellungen besagter Wirkung und kann explizit berechnet werden. Bezeichnet $\mathrm{Ker}_{\mathrm{L}^2}(\mathrm{D}) = \bigoplus_{\alpha,\beta} \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ die Zerlegung des Kerns von D in die jeweiligen Eigenunterräume gemäß der Spektralzerlegung der entsprechenden Generatoren $i\,\partial_\varphi$, $i\,\partial_s$, so berechnet man bezüglich der trivialen Spin–Struktur

$$\mathrm{Ker}_{\mathrm{L}^2}(\mathrm{D}_{|(M^3_\Gamma\setminus\Gamma)}) = \bigoplus_{\beta=-1,-2,\ldots} \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_\beta,$$

siehe Satz 2.5 auf Seite 58, während auf M^3_Γ die L^2–Kerne des Dirac–Operators und seines Abschlusses trivial sind. In diesem Fall ist somit $0 \in \sigma^{\mathrm{L}^2}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathrm{D}})$. Da M^3_Γ und $M^3_{A\Gamma}$ für $A \in \mathrm{U}(2)$ isometrisch sind, gelten Aussagen, die für eine bestimmte Kurve in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ zutreffen, auch für Kurven, welche durch Möbius–Transformationen aus diesen hervorgehen.

Danksagung. Der Verfasser wünscht Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich für seine Betreuung und Hilfsbereitschaft während der Erstellung dieser Arbeit zu danken.

Teil 1

Hyperflächen in der Eguchi–Hanson–Metrik und deren Geometrie

In diesem ersten, der Geometrie der betrachteten Familien von Hyperflächen gewidmeten Teil erörtern wir eingangs die Konstruktion der Eguchi–Hanson–Metrik, die das einfachste Beispiel einer hyper–kählerschen asymptotisch lokal euklidischen Metrik darstellt. Sie kann im Totalraum des Kotangentialbündels über dem eindimensionalen komplex projektiven Raum realisiert werden. Die zu untersuchenden Hyperflächen M^3_Γ entstehen dann als komplexe Linienbündel in $T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ über Kurven Γ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und wir bestimmen deren vollständigen Krümmungstensor sowie die zweite Fundamentalform. Desweiteren untersuchen wir die Struktur des geodätischen Flusses derselben, welcher im Fall einer geschlossenen Kurve drei erste Integrale aufweist. Für den Fall, daß die betrachtete Kurve Γ ein Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung ist, berechnen wir den Abstand eines Punktes zum Nullschnitt von M^3_Γ und sind so in der Lage, das exponentielle Wachstum von $M^3_{A\Gamma}$ für $A \in \mathrm{U}(2)$ explizit zu bestimmen.

1. Der Eguchi–Hanson-Raum $(T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), g_t)$

Sei G eine endliche, nicht–triviale Untergruppe von $\mathrm{U}(m)$, die frei auf $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ wirke. Dann besitzt $\mathbb{C}^m/G$ eine isolierte Quotientensingularität bei null und jede Auflösung (M, π) von $\mathbb{C}^m/G$ ist eine nicht kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit. Eine Kähler–Metrik g auf M heißt *asymptotisch* zu der euklidischen Metrik h auf $\mathbb{C}^m/G$, falls eine glatte, surjektive Abbildung $f : M \to \mathbb{C}^m/G$ derart existiert, daß $f^{-1}(0)$ eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, endliche Vereinigung von kompakten Untermannigfaltigkeiten von M ist und f einen Diffeomorphismus $M/f^{-1}(0) \simeq (\mathbb{C}^m/\{0\})/G$ induziert. Unter diesem Diffeomorphismus hat $f_*(g)$ den Relationen

$$(1.1) \qquad f_*(g) = h + \mathrm{O}(r^{-4}), \qquad \nabla f_*(g) = \mathrm{O}(r^{-5}), \qquad \nabla^2 f_*(g) = \mathrm{O}(r^{-6})$$

für großes r zu genügen, wobei r die Entfernung vom Ursprung und ∇ der flache Zusammenhang in $\mathbb{C}^m/G$ ist. Eine Metrik dieser Beschaffenheit heißt *asymptotisch lokal euklidisch* oder einfach *ALE–Metrik*. Man beachte, daß der topologische Typ des Endes durch einen Quotienten des euklidischen Raumes gegeben ist. Im folgenden werden wir uns auf den Fall $m = 2$ beschränken.

Ursprünglich wurden vierdimensionale ALE–Mannigfaltigkeiten in der Relativitätstheorie als Analoga zu Instantonen in der Eichtheorie eingeführt. In [**21**] bewiesen Schoen und Yau, daß eine vollständige, asymptotisch euklidische, vierdimensionale Mannigfaltigkeit, deren Ricci–Tensor verschwindet, notwendig flach sein muß. Eine entsprechende Aussage für Ricci–flache ALE–Kähler–Metriken gilt jedoch nicht, da, wie bereits erwähnt, in diesem Fall die Topologie des Endes von der des euklidischen Raumes verschieden ist. Eine wichtige Klasse von Kähler–Metriken, die zu Beispielen von Ricci–flachen ALE–Räumen führt, bilden die sogenannten Hyper–Kähler–Strukturen. Im Fall einer orientierten, vierdimensionalen C^∞–Mannigfaltigkeit X entspricht eine Hyper–Kähler–Struktur einer

Metrik, deren Holonomie in SU(2) enthalten ist. Eine Mannigfaltigkeit mit einer solchen Struktur ist Ricci–flach und selbstdual, und deren Metrik ist kählersch bezüglich jeder der drei antikommutierenden komplexen Strukturen. Eine Hyper–Kähler–Struktur kann auch als ein Tripel von glatten, geschlossenen 2–Formen σ_1, σ_2, σ_3 auf X definiert werden, die lokal eine Darstellung der Form

$$\sigma_1 = l_1 \wedge l_4 + l_2 \wedge l_3, \qquad \sigma_2 = l_1 \wedge l_3 - l_2 \wedge l_4, \qquad \sigma_3 = l_1 \wedge l_2 + l_3 \wedge l_4, \tag{1.2}$$

besitzen, wobei $(l_1, \ldots, l_4)$ ein lokales orientiertes Reper von 1–Formen auf X ist. Die systematische Konstruktion von ALE–Kähler–Metriken mit Holonomie SU(2) als Hyper–Kähler–Quotienten wurde von Hitchin [**12**] begonnen und anschließend von Kronheimer [**16, 17**] durchgeführt, die die Räume $\mathbb{C}^2/G$ für allgemeine Polyedergruppen $G \subset \mathrm{SU}(2)$ studierten. Sie zeigten die Existenz von Hyper–Kähler–Metriken auf der Auflösung M für die jeweils betrachteten Gruppen G und erzielten eine vollständige Klassifikation. Für zyklische Gruppen sind diese Metriken explizit bekannt. ALE–Metriken mit Holonomie SU(2), SU(3) oder SU(4) spielten bei der Konstruktion kompakter 7– und 8–Mannigfaltigkeiten mit Holonomie G_2 und Spin(7) durch Joyce [**13**] eine entscheidende Rolle.

Das erste Beispiel einer vierdimensionalen Hyper–Kähler–ALE–Mannigfaltigkeit wurde von Eguchi und Hanson gefunden [**4**]. Wir beschreiben im folgenden die Konstruktion dieser Metrik. Sei $m = 2$ und $G = \mathbb{Z}_2$ und Φ die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \qquad \Phi(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2^2, z_1 z_2).$$

Das Bild von $\mathbb{C}^2$ unter Φ ist gegeben durch

$$X := \operatorname{Im}\Phi = \left\{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 : w_1 w_2 = w_3^2\right\},$$

und Φ induziert eine Bijektion $\Phi : \mathbb{C}^2/\{\pm 1\} \to X$, so daß X analytisch äquivalent zu $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$ wird. Das kanonische Bündel über $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$,

$$H := \left\{(l, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 : v \in l\right\},$$

kann explizit wie folgt realisiert werden. Führen wir die homogenen Koordinaten $[\alpha : \beta]$ in $P^1(\mathbb{C})$ ein, so besteht der Totalraum H aus allen Äquivalenzklassen von Tripeln $[\alpha, \beta, \gamma]$ bezüglich der Äquivalenzrelation $(\alpha, \beta, \gamma) \sim (A\alpha, A\beta, \gamma/A)$, wobei $A \in \mathbb{C}^*$ und γ eine komplexe Zahl ist, d. h.

$$H = \left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}\right\} / \sim .$$

Das eindimensionale komplexe Tangentialbündel $\mathrm{T}\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist biholomorph zum Quadrat des zu dem kanonischen Bündel dualen Bündels [**19**],

$$\mathrm{T}\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = H^* \otimes H^*,$$

woraus man für das Kotangentialbündel $T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die Beschreibung

$$\mathrm{T}^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = H^2 = \left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}\right\} / \sim_1$$

mit der Äquivalenzrelation $(\alpha, \beta, \gamma) \sim_1 (A\alpha, A\beta, \gamma/A^2)$ erhält. Wir bemerken dabei, daß H^2 einfach zusammenhängend ist. Wir definieren nun die Abbildung

$$\pi : H^2 \longrightarrow X, \quad \pi([\alpha, \beta, \gamma]) = (\alpha^2\gamma, \beta^2\gamma, \alpha\beta\gamma).$$

Das Urbild des Punktes $(0, 0, 0)$ unter π entspricht dem Nullschnitt des Bündels H^2. Außerhalb dieser Menge ist $\pi : H^2 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow X \setminus \{(0, 0, 0)\}$ bijektiv, und (H^2, π) stellt eine Auflösung der Singularität von $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$ bei null dar. Zusammenfassend erhalten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H^2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathbb{C}^2/\{\pm 1\} \arrow[rr, "\Phi", "\simeq"'] & & X \end{tikzcd}$$

Die Abbildung π_1 ist dabei durch die Formel $\pi_1([\alpha,\beta,\gamma]) = [\alpha\sqrt{\gamma}, \beta\sqrt{\gamma}]$ gegeben. Die geschlossene 2–Form $dz_1 \wedge dz_2$ und die Funktion $u_1 := |z_1|^2 + |z_2|^2$ auf $\mathbb{C}^2$ sind invariant unter Reflexionen am Ursprung und können infolgedessen als Formen auf $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$ aufgefaßt werden. Durch Zurückziehen erhält man Formen auf H^2, die wir im folgenden ebenfalls mit $dz_1 \wedge dz_2$ und u_1 bezeichnen werden.

Wir kommen nun zur Beschreibung der Eguchi–Hanson–Metrik. Le Brun folgend [**18**] betrachten wir auf der komplexen Mannigfaltigkeit H^2 die Familie von reellwertigen Funktionen f_t,

$$f_t := \sqrt{u_1^2 + t^4} + t^2 \log \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + t^4} + t^2}, \quad t > 0.$$

Die Funktion $u_1 : H^2 \to \mathbb{R}$ ist dabei explizit durch $u_1([\alpha,\beta,\gamma]) = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)|\gamma|$ gegeben und man sieht, daß außerhalb der exzeptionellen Kurve, also des Nullschnittes, u_1 eine glatte Funktion ist, und dasselbe gilt für f_t. Für $t > 0$ ist die assoziierte Form

$$\omega_t := i\,\partial\,\overline{\partial}\, f_t \in \mathcal{E}^{1,1}(H^2)$$

sogar auf der exzeptionellen Kurve regulär und definiert somit eine Kähler–Metrik auf H^2. So kann unter Benutzung von homogenen Koordinaten eine komplex analytische Struktur auf H^2 wie folgt definiert werden: Wir betrachten in H^2 die offenen Teilmengen $U_\alpha = \{[\alpha,\beta,\gamma] : \alpha \neq 0\}$, $U_\beta = \{[\alpha,\beta,\gamma] : \beta \neq 0\}$ und definieren die Homeomorphismen

$$\begin{aligned} h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^2, &\quad [\alpha,\beta,\gamma] = [1, \beta/\alpha, \gamma\alpha^2] \longmapsto (\beta/\alpha, \gamma\alpha^2), \\ h_\beta : U_\alpha \to \mathbb{C}^2, &\quad [\alpha,\beta,\gamma] = [\alpha/\beta, 1, \gamma\beta^2] \longmapsto (\alpha/\beta, \gamma\beta^2). \end{aligned}$$

Da $h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ biholomorph ist, ergibt dies eine komplex analytische Struktur auf H^2. Wir können deshalb die Funktionen β und γ als lokale Koordinaten in U_α auffassen, indem wir α gleich eins setzen, so daß $\partial : \mathcal{E}^{(p,q)}(H^2) \to \mathcal{E}^{(p+1,q)}(H^2)$ und $\overline{\partial} : \mathcal{E}^{(p,q)}(H^2) \to \mathcal{E}^{(p,q+1)}(H^2)$ auf U_α durch

$$\partial = \frac{\partial}{\partial\beta} d\beta + \frac{\partial}{\partial\gamma} d\gamma, \qquad \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial\overline{\beta}} d\overline{\beta} + \frac{\partial}{\partial\overline{\gamma}} d\overline{\gamma}$$

gegeben sind. Die Regularität von ω_t für $t > 0$ folgt dann aufgrund der Tatsache, daß die Ableitungen von f_t bezüglich γ, β und $\overline{\gamma}, \overline{\beta}$ regulär werden (beachte, daß $u_1 = (1 + \beta\overline{\beta})\sqrt{\gamma\overline{\gamma}}\ $); so gilt beispielsweise in $\mathbb{C}$

$$\partial\,\overline{\partial}\left(\sqrt{|z|^2 + t^4} + t^2 \log \frac{|z|}{\sqrt{|z|^2 + t^4} + t^2}\right) = \frac{2t^6 + 2t^2\bar{z}z + (2t^4 + \bar{z}z)\sqrt{t^4 + \bar{z}z}}{4(t^4 + \bar{z}z)(t^2 + \sqrt{t^4 + \bar{z}z})^2} dz \wedge d\bar{z}.$$

Für $t = 0$ werden $f_0 = u_1$ und ω_0 längs des Nullschnittes singulär. Auf H^2 induziert die Kähler–Form ω_t eine Riemannsche Metrik gemäß der Formel

$$g_t(X,Y) := \omega_t(X, JY), \qquad X, Y \in \mathcal{X}(H^2),$$

wobei J die komplexe Struktur von H^2 bezeichnet. Für $t \neq 0$ wird damit (H^2, g_t) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.
Da die komplexe Mannigfaltigkeit $M^4 := H^2 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ eine offene, dichte Teilmenge von H^2 ist, genügt es für das Studium der geometrischen Eigenschaften von H^2, sowohl ω_t als auch die anderen relevanten geometrischen Größen auf M^4 zu betrachten. Da weiter M^4 unter π_1 bijektiv auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \{\pm 1\}$ abgebildet wird, kann ω_t auf M^4 bezüglich der Koordinaten z_1, z_2 explizit berechnet werden. So ergibt sich für $u_1 = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \in \mathcal{E}^{0,0}(\mathbb{R}^4)$, aufgefaßt als eine Funktion auf $\mathbb{C}^2$,

$$du_1 = \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial\, u_1}{\partial\, z_i} dz_i + \frac{\partial\, u_1}{\partial\, \bar{z}_i} d\bar{z}_i \right) \in \mathcal{E}^{1,0}(\mathbb{R}^4) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(\mathbb{R}^4),$$

$$\overline{\partial}\, u_1 = z_1 d\bar{z}_1 + z_2 d\bar{z}_2, \qquad \partial\, u_1 = \bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2,$$

siehe beispielsweise [**23**], woraus wiederum mit $\overline{\partial} f_t = (\sqrt{u_1^2 + t^4}/u_1)\, \overline{\partial} u_1$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}
\omega_t &= i \left(\frac{1}{\sqrt{u_1^2+t^4}} - \frac{\sqrt{u_1^2+t^4}}{u_1^2} \right) \partial\, u_1 \wedge \overline{\partial} u_1 + i \frac{\sqrt{u_1^2+t^4}}{u_1}\, \partial\, \overline{\partial} u_1 \\
&= -i \frac{t^4}{u_1^2\sqrt{u_1^2+t^4}} \big[\, |z_1|^2\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + |z_2|^2\, dz_2 \wedge d\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2\, dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \\
&\quad + \bar{z}_1 z_2\, dz_1 \wedge d\bar{z}_2 \big] + i \frac{\sqrt{u_1^2+t^4}}{u_1} \big[dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \big]
\end{aligned}$$

folgt. Bezüglich der Koordinaten $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ drückt sich die Form $dz_i \wedge d\bar{z}_j$ gemäß

$$dz_i \wedge d\bar{z}_j = dx_i \wedge dx_j + dy_i \wedge dy_j - i(dx_i \wedge dy_j + dx_j \wedge dy_i)$$

aus und die Wirkung von J ist durch die Relationen $J(\partial_{x_i}) = \partial_{y_i}$, $J(\partial_{y_i}) = -\,\partial_{x_i}$ gegeben. Die Berechnung von g_t eingeschränkt auf M^4 bezüglich des Repers $\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{y_1}, \partial_{y_2}\}$ liefert dann

$$g_t = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & -G_4 & -G_3 \\ 0 & G_1 & G_3 & -G_4 \\ -G_4 & G_3 & G_2 & 0 \\ -G_3 & -G_4 & 0 & G_2 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned}
G_1 &= G - H(x_1^2 + y_1^2), & G_2 &= G - H(x_2^2 + y_2^2), \\
G_3 &= H(x_1 y_2 - y_1 x_2), & G_4 &= H(x_1 x_2 + y_1 y_2),
\end{aligned}$$

und G, $H : M^4 \to \mathbb{R}$ die glatten Funktionen

$$G := \frac{2\sqrt{u_1^2+t^4}}{u_1}, \qquad H := \frac{2t^4}{u_1^2\sqrt{u_1^2+t^4}}$$

sind. Hieraus wird ersichtlich, daß g_t die Bedingung (1.1) erfüllt. Für den späteren Gebrauch definieren wir weiter die glatte Funktion

$$K : M^4 \to \mathbb{R}, \qquad K := G - Hu_1 = 4G^{-1}.$$

Die Volumenform $dM^4 = \omega_t \wedge \omega_t$ berechnet sich weiterhin zu $V(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge \bar{d}z_2)$, wobei $V \equiv 2$. Die Ricci–Form $\mathrm{Ric} = i\, \partial\, \overline{\partial} \log V$, siehe beispielsweise [**14**], verschwindet demnach, und es folgt unmittelbar, daß der Riemannsche Krümmungstensor bezüglich der Zerlegung $\bigwedge^2(M^4) = \bigwedge^2_+(M^4) \oplus \bigwedge^2_-(M^4)$ durch

$$R = \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix} - \frac{S}{12} = \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist; dabei bezeichnen W_- und W_+ jeweils den negativen und positiven Teil des Weyl–Tensors, B den spurfreien Teil des Ricci–Tensors und S die Skalarkrümmung. Die Bedingung $B = 0$ impliziert, daß (H^2, g_t) ein Einstein–Raum ist und das Verschwinden von W_- bedeutet, daß (H^2, g_t) selbstdual ist; es ist der Aussage äquivalent, daß das Bündel $\bigwedge^2_-(M^4)$ flach ist und demzufolge drei parallele Formen auf $\bigwedge^2_-(M^4)$ existieren. Als solche können ω_t und die zwei geschlossenen 2–Formen σ_2, σ_3, die durch $\sigma_2 + i\sigma_3 = dz_1 \wedge dz_2$ definiert sind, gewählt werden. Es kann dann gezeigt werden, daß das Tripel $(\omega_1, \sigma_2, \sigma_3)$ lokal in der Form (1.2) geschrieben werden kann und somit eine Hyper–Kähler–Struktur auf M^4 und damit auf H^2 darstellt.
Wir betrachten nun die Projektion

$$p : H^2 = T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2,$$

die explizit durch $[\alpha, \beta, \gamma] \mapsto [\alpha : \beta] \mapsto \alpha/\beta$ gegeben ist. Die Funktion u_1 ist unter der Standardwirkung von U(2) auf $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \{\pm 1\} \simeq M^4$, die durch ihre Matrixdarstellung gegeben ist, invariant. Andererseits wirkt U(2) als Gruppe holomorpher Transformationen auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vermöge der *Möbius–Transformation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d},$$

bzw. auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ gemäß

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [\alpha : \beta] = [a\alpha + b\beta : c\alpha + d\beta].$$

Unter Einführung der Abbildung $\tilde{p} := p \circ \pi_1^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \{\pm 1\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, die durch $\tilde{p}[z_1, z_2] = [z_1 : z_2]$ gegeben ist, sieht man dann, daß

$$\tilde{p}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [z_1, z_2]\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tilde{p}[z_1, z_2],$$

was impliziert, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^2 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \arrow[r, "\pi_1", "\simeq"'] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \{\pm 1\} \arrow[dl, "\tilde{p}"] \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \end{tikzcd}$$

kompatibel mit der Gruppenwirkung von U(2) ist. Da die Menge $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \{\pm 1\}$ unter U(2) auf sich selbst abgebildet wird, folgt, daß nach Ausdehnung der Wirkung von U(2) auf H^2 die exzeptionelle Kurve in H^2 gleichermaßen auf sich selbst abgebildet werden muß. Die Projektion $p : H^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist demnach ebenfalls mit der U(2)–Wirkung kompatibel. Da u_1 auf dem Nullschnitt verschwindet, wird u_1 auf H^2 U(2)–invariant. Die Kähler–Metrik ω_t und die Riemannsche Metrik g_t, die vermöge der Funktion u_1 definiert wurden, sind somit auf H^2 ebenfalls unter U(2) invariant.

2. Hyperflächen in $(T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), g_t)$ und deren innere Geometrie

Wir führen nun gewisse Hyperflächen in $T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ein und betrachten zu diesem Zweck für eine beliebige Kurve $\Gamma(s) = u(s) + iv(s) = r(s)e^{i\varphi_\Gamma(s)}$ in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ deren Urbild

$$M^3_\Gamma := p^{-1}(\Gamma) = \left\{[\Gamma(s), 1, \gamma] \in H^2 : \gamma \in \mathbb{C}\right\},$$

wodurch wir eine dreidimensionale reelle Hyperfläche in H^2 erhalten. Sei h_t die durch g_t auf M^3_Γ induzierte Riemannsche Metrik. Die dreidimensionale Mannigfaltigkeit M^3_Γ ist offen und im Fall einer geschlossenen Kurve ist ihr Ende vom topologischen Typ $T^2 \times (0,\infty)/\{\pm 1\}$, wobei $T^2 = S^1 \times S^1$ der zweidimensionale Torus ist. Die Hyperflächen M^3_Γ sind asymptotisch flach, jedoch keine ALE–Räume, da deren Ende nicht nach dem Ende von $\mathbb{R}^3/G$ geformt ist. Man beachte, daß M^3_Γ ein eindimensionales komplexes Vektorbündel über Γ ist.

Da $p : H^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit der Wirkung von $\mathrm{U}(2)$ kompatibel ist, und g_t und somit h_t invariant unter dieser Wirkung sind, wird M^3_Γ isometrisch auf $M^3_{A\,\Gamma}$ abgebildet, wobei $A \in \mathrm{U}(2)$. Wir erinnern an dieser Stelle daran, daß unter Möbius–Transformationen verallgemeinerte Kreise in $\mathbb{C}$ wieder auf verallgemeinerte Kreise abgebildet werden.

Wir wollen im folgenden die innere Geometrie der Hyperflächen M^3_Γ bestimmen und werden hierzu annehmen, daß $\Gamma(s)$ auf Bogenlänge parametrisiert ist. Unter Verwendung der Projektion p erhält man eine Parametrisierung $\Psi : [0,L) \times (0,\infty) \times [0,2\pi) \to \pi_1(M^3_\Gamma \cap M^4), (s,\varrho,\varphi) \mapsto [x_1,y_1,x_2,y_2]$ der Hyperflächen M^3_Γ in M^4 gemäß

$$M^3_\Gamma \cap M^4 \simeq \left\{\Big[\varrho(u(s)\cos\varphi - v(s)\sin\varphi),\ \varrho(v(s)\cos\varphi + u(s)\sin\varphi),\ \varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\Big]\right\},$$

wobei s dem Längenparameter von Γ entspricht und $\sqrt{\gamma} = \varrho \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$ den Parameter in der Faser über Γ bezeichnet. Alle weiteren Rechnungen werden auf der Mannigfaltigkeit $M^3_\Gamma \cap M^4$, welche dicht in M^3_Γ liegt, durchgeführt werden. Die durch die Parametrisierung Ψ auf M^3_Γ induzierten Vektorfelder lauten

$$\begin{aligned}
\partial_s = \Psi_*(\partial_s) &= \Big(\varrho(\dot u\cos\varphi - \dot v\sin\varphi),\ \varrho(\dot v\cos\varphi + \dot u\sin\varphi),\ 0,\ 0\Big),\\
\partial_\varrho = \Psi_*(\partial_\varrho) &= \Big(u\cos\varphi - v\sin\varphi,\ v\cos\varphi + u\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi\Big),\\
\partial_\varphi = \Psi_*(\partial_\varphi) &= \Big(-\varrho(u\sin\varphi + v\cos\varphi),\ -\varrho(v\sin\varphi - u\cos\varphi),\ -\varrho\sin\varphi,\ \varrho\cos\varphi\Big).
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt

$$\left|\dot\Gamma(s)\right|^2 = \dot u^2 + \dot v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi_\Gamma^2 = 1.$$

Wir bemerken, daß $u\dot u + v\dot v = r\dot r$ und $u\dot v - v\dot u = r^2\dot\varphi_\Gamma$. Weiterhin gelten außerhalb des Nullschnittes die Identitäten

$$\begin{aligned}
(x_1^2 + y_1^2)_{|M^3_\Gamma} &= \varrho^2 r^2, & (x_2^2 + y_2^2)_{|M^3_\Gamma} &= \varrho^2,\\
(x_1y_2 - y_1x_2)_{|M^3_\Gamma} &= -v\varrho^2, & (x_1x_2 + y_1y_2)_{|M^3_\Gamma} &= u\varrho^2,
\end{aligned}$$

sowie $u_{1|M^3_\Gamma} = \varrho^2(r^2+1)$. Im Fall einer geschlossenen Kurve Γ ist die Hyperfläche (M^3_Γ, h_t) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit solange $t \neq 0$. Unter Gebrauch obiger Relationen erhalten wir dann folgende Proposition.

Proposition 1.1. *Sei h_t die durch die Eguchi–Hanson–Metrik g_t auf $M^3_\Gamma \subset H^2$ induzierte Riemannsche Metrik. Die Koeffizienten von h_t sind dann bezüglich des lokalen*

Koordinatenrepers $\{\partial_s, \partial_\varrho, \partial_\varphi\}$ *auf* $M^3_\Gamma \cap M^4$ *gegeben durch*

$$\begin{aligned} h_{11} &= (K + H\varrho^2)\varrho^2, & h_{12} &= r\dot{r}\varrho K, \\ h_{13} &= \dot{\varphi}_\Gamma r^2 \varrho^2 K, & h_{22} &= (r^2+1)K, \\ h_{23} &= 0, & h_{33} &= (r^2+1)\varrho^2 K. \end{aligned}$$

□

Auf $M^3_\Gamma \cap M^4$ ist die Funktion K durch die Formel

$$K = \frac{2\varrho^2(r^2+1)}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}}$$

gegeben, und die Funktionen G und H, durch

$$G = \frac{2\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}{\varrho^2(r^2+1)}, \qquad H = \frac{2t^4}{\varrho^4(r^2+1)^2\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}.$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die geometrische Bedeutung der Funktion K bzw. G darauf beruht, daß K^{-1} gleich dem Quadrat der Länge des Gradienten der Funktion $\varrho\sqrt{r^2+1}$, vgl. Teil 2, Abschnitt 1, entspricht. Zur Berechnung der geometrisch relevanten Größen von M^3_Γ stellt es sich als zweckmäßig heraus, innerhalb des Cartanschen Formalismus zu arbeiten. Zu diesem Zweck bestimmen wir ein Orthonormalreper bezüglich h_t mittels des Ansatzes

(1.3a) $$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\,\partial_\varrho, \qquad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{h_{33}}}\,\partial_\varphi, \qquad Y_3 = D\,\partial_s + E\,\partial_\varrho + F\,\partial_\varphi\,.$$

Die Vektorfelder Y_1 und Y_2 sind auf Länge 1 normiert; da $h_{23} = 0$, sind sie zueinander orthogonal. Aus den Bedingungen $h_t(Y_1, Y_3) = h_t(Y_2, Y_3) = 0$ und $h_t(Y_3, Y_3) = 1$ erhält man dann

(1.3b) $$D = h_{22}\Sigma, \qquad E = -h_{12}\Sigma, \qquad F = -\frac{h_{13}}{\varrho^2}\Sigma,$$

wobei wir die Funktion $\Sigma := \varrho\sqrt{(\det h_t)^{-1}}$ einführten, und man berechnet

$$\det h_t = h_{22}(h_{11}h_{33} - h_{12}^2\varrho^2 - h_{13}^2) = 4(r^2+1)K\varrho^4 = \frac{8\varrho^6(r^2+1)^2}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}} > 0.$$

Die so bestimmten Vektorfelder Y_1, Y_2, Y_3 sind auf ganz $M^3_\Gamma \cap M^4$ definiert und stellen somit außerhalb der exzeptionellen Kurve einen globalen Schnitt im Reperbündel von M^3_Γ dar. Wir bemerken, daß D stets positiv ist, da h_{22} positiv ist. Die zu dem gegebenen Orthonormalreper duale Basis von 1–Formen $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ ist dann durch

(1.4) $$\omega^1 = \sqrt{h_{22}}\Big(d\varrho - \frac{E}{D}ds\Big), \qquad \omega^2 = \sqrt{h_{33}}\Big(d\varphi - \frac{F}{D}ds\Big), \qquad \omega^3 = \frac{1}{D}ds$$

gegeben; zusammen mit den Zusammenhangsformen $\omega_{ji} = h_t(\nabla Y_j, Y_i)$ des Levi–Civita–Zusammenhangs ∇ von M^3_Γ sowie den Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors $R^j_{kli} = R_{klij}$ sind sie eindeutig durch die Strukturgleichungen von Cartan

(1.5) $$d\omega^i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega^j,$$

(1.6) $$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3} R^j_{kli}\omega^k \wedge \omega^l$$

bestimmt. Wir bestimmen nun die Zusammenhangsformen der betrachteten Hyperflächen.

Proposition 1.2. *In der Basis* (1.3) *sind die Formen* ω_{ji} *des Levi–Civita–Zusammenhangs von* (M^3_Γ, h_t) *gegeben durch*

$$\begin{aligned}
\omega_{12} &= \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right)\omega^2 = \left(1 + \frac{\varrho}{2}(\log K)_{,\varrho}\right)\left(d\varphi - \frac{F}{D}ds\right),\\
\omega_{13} &= -\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}(\log D)_{,\varrho}\,\omega^3 = -\frac{1}{D\sqrt{h_{22}}}(\log D)_{,\varrho}\,ds,\\
\omega_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

Beweis. Unter Benutzung des Orthonormalrepers (1.3) auf $M^3_\Gamma \cap M^4$ können die Komponenten des Levi–Civita–Zusammenhangs mittels der sich aus der Koszul–Formel ergebenden Beziehungen

$$2h_t(\nabla_{Y_i}Y_j, Y_k) = h_t([Y_i, Y_j], Y_k) - h_t([Y_j, Y_k], Y_i) + h_t([Y_k, Y_i], Y_j) \tag{1.7}$$

berechnet werden. Eine direkte Berechnung der Kommutatoren ergibt

$$\begin{aligned}
[Y_1, Y_2] &= -\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}\frac{K_{,\varrho}}{K}\right)Y_2,\\
[Y_1, Y_3] &= \left(E_{,\varrho} + \frac{D}{2h_{22}}\Big(2r\dot{r}K + (r^2+1)K_{,s}\Big) + \frac{E}{2h_{22}}(r^2+1)K_{,\varrho} - \frac{E}{D}D_{,\varrho}\right)Y_1\\
&\quad + \varrho\left(F_{,\varrho} - \frac{F}{D}D_{,\varrho}\right)Y_2 + \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\frac{D_{,\varrho}}{D}Y_3,\\
[Y_2, Y_3] &= \left(\frac{D}{2h_{33}}\varrho^2\Big(2r\dot{r}K + (r^2+1)K_{,s}\Big) + \frac{E}{2h_{33}}(r^2+1)(2\varrho K + \varrho^2 K_{,\varrho})\right)Y_2.
\end{aligned}$$

Desweiteren berechnet man

$$(r^2+1)K_{,s} = r\dot{r}\varrho K_{,\varrho}, \tag{1.8}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
E_{,\varrho} - \frac{E}{D}D_{,\varrho} &= \Sigma\left(\frac{h_{12}}{h_{22}}(r^2+1)K_{,\varrho} - r\dot{r}K - r\dot{r}\varrho K_{,\varrho}\right) = -\Sigma r\dot{r}K,\\
D\Big(2r\dot{r}K + (r^2+1)K_{,s}\Big) &+ E(r^2+1)K_{,\varrho} = 2(r^2+1)r\dot{r}K^2\Sigma;
\end{aligned}$$

dies zeigt, daß der erste Koeffizient von $[Y_1, Y_3]$ verschwindet,

$$E_{,\varrho} - \frac{E}{D}D_{,\varrho} + \frac{1}{2h_{22}}\Big(D(2r\dot{r}K + (r^2+1)K_{,s}) + E(r^2+1)K_{,\varrho}\Big) = 0.$$

Auf ähnliche Weise sieht man, daß der zweite Koeffizient ebenfalls verschwinden muß, denn

$$\begin{aligned}
F_{,\varrho} - \frac{F}{D}D_{,\varrho} &= -h_{13,\varrho}\frac{1}{\varrho^2}\Sigma - h_{13}\left(-2\frac{1}{\varrho^3}\Sigma + \frac{1}{\varrho^2}\Sigma_{,\varrho}\right)\\
&\quad + h_{13}\frac{1}{\varrho^2}\Sigma\frac{1}{(r^2+1)K\Sigma}(r^2+1)\left(K_{,\varrho}\Sigma + K\Sigma_{,\varrho}\right)\\
&= \Sigma\left(-r^2\dot{\varphi}_\Gamma(2\varrho K + \varrho^2 K_{,\varrho})\frac{1}{\varrho^2} + 2r^2\dot{\varphi}_\Gamma\left(\frac{1}{\varrho}K + \frac{1}{2}K_{,\varrho}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Der Kommutator $[Y_2, Y_3]$ verschwindet vollständig: unter abermaliger Berücksichtigung von (1.8) erhält man

$$D\varrho^2\Big(2r\dot{r}K + (r^2+1)K_{,s}\Big) + E(r^2+1)(2\varrho K + \varrho^2 K_{,\varrho}) = 0.$$

Zusammenfassend erhalten wir für die Kommutatoren $[Y_i, Y_j]$ die Ausdrücke

$$[Y_1, Y_2] = -\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right) Y_2, \qquad [Y_1, Y_3] = \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}(\log D)_{,\varrho}\, Y_3;$$

der Kommutator $[Y_2, Y_3]$ ist identisch null. Damit verbleiben in den Gleichungen (1.7) lediglich die Terme

$$h_t([Y_2, Y_1], Y_2) = \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right), \quad h_t([Y_3, Y_1], Y_3) = -\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}(\log D)_{,\varrho},$$

und wir erhalten für die Formen ω_{ij} die angegebenen Ausdrücke. □

Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse lautet die erste Gruppe (1.5) der Strukturgleichungen

$$\begin{aligned}
d\omega^1 &= \omega_{12} \wedge \omega^2 + \omega_{13} \wedge \omega^3 = 0,\\
d\omega^2 &= \omega_{21} \wedge \omega^1 + \omega_{23} \wedge \omega^3 = \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right)\omega^1 \wedge \omega^2,\\
d\omega^3 &= \omega_{31} \wedge \omega^1 + \omega_{32} \wedge \omega^2 = -\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}(\log D)_{,\varrho}\,\omega^1 \wedge \omega^3.
\end{aligned}$$

Wir sind nun in der Lage, die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors sowie den vollständigen Ricci–Tensor und die Skalarkrümmung der Hyperflächen M^3_Γ zu berechnen.

Proposition 1.3. *Die Komponenten R_{ijkl} des Riemannschen Krümmungstensors R der Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) sind bezüglich des Orthonormalrepers* (1.3) *durch*

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= \frac{1}{2h_{22}}\left(\frac{1}{\varrho}(\log K)_{,\varrho} + (\log K)_{,\varrho\varrho}\right),\\
R_{2323} &= -\frac{1}{2h_{22}}\left(\frac{2}{\varrho} + (\log K)_{,\varrho}\right)(\log D)_{,\varrho},\\
R_{1313} &= \frac{1}{2h_{22}}\left(-2(\log D)_{,\varrho\varrho} + (\log K)_{,\varrho}(\log D)_{,\varrho} + 2(\log D)^2_{,\varrho}\right)
\end{aligned}$$

gegeben, während R_{1213}, R_{2312} und R_{2313} verschwinden.

Beweis. Wir berechnen die Komponenten von R mit Hilfe der Strukturgleichungen (1.6). Nach Proposition 1.2 verschwinden die 2–Formen $\omega_{13} \wedge \omega_{32}$ und $\omega_{12} \wedge \omega_{23}$ während

$$\omega_{21} \wedge \omega_{13} = \frac{1}{h_{22}}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right)(\log D)_{,\varrho}\,\omega^2 \wedge \omega^3$$

ist. Weiter berechnen sich die Differentiale $d\omega_{ij}$ der Zusammenhangsformen zu

$$\begin{aligned}
d\omega_{12} &= \left(\frac{\varrho}{2}(\log K)_{,\varrho}\right)_{,\varrho} d\varrho \wedge d\varphi + \left(\frac{\varrho}{2}(\log K)_{,\varrho}\right)_{,s} ds \wedge d\varphi \\
&\quad - \left(\frac{F}{D}\left(1 + \frac{\varrho}{2}(\log K)_{,\varrho}\right)\right)_{,\varrho} d\varrho \wedge ds \\
&= \left(\frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho} + \frac{\varrho}{2}(\log K)_{,\varrho\varrho}\right) \frac{1}{h_{22}\varrho}\, \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad - \left(\left(\frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho} + \frac{\varrho}{2}(\log K)_{,\varrho\varrho}\right) \frac{E}{\sqrt{h_{33}}} + \frac{\varrho}{2}(\log K)_{,s\varrho}\frac{D}{\sqrt{h_{33}}}\right) \omega^2 \wedge \omega^3, \\
d\omega_{13} &= -\left(\frac{1}{D\sqrt{h_{22}}}(\log D)_{,\varrho}\right)_{,\varrho} d\varrho \wedge ds \\
&= \left(-\frac{1}{h_{22}}(\log D)_{,\varrho\varrho} + \frac{1}{2h_{22}}(\log K)_{,\varrho}(\log D)_{,\varrho} + \frac{1}{h_{22}}(\log D)^2_{,\varrho}\right) \omega^1 \wedge \omega^3, \\
d\omega_{23} &= 0
\end{aligned}$$

und unter Verwendung der Gleichungen (1.6) ergeben sich schließlich die angegebenen Ausdrücke für die Komponenten R_{ijkl} des Krümmungstensors. Dabei beachte man, daß

$$\begin{aligned}
&((\log K)_{,\varrho} + \varrho(\log K)_{,\varrho\varrho})\, E + \varrho(\log K)_{,s\varrho} D \\
&\quad = ((\log K)_{,\varrho} + \varrho(\log K)_{,\varrho\varrho})\,(-r\dot{r}\varrho K\Sigma) + \varrho\left(\frac{\varrho r\dot{r}}{r^2+1}(\log K)_{,\varrho}\right)_{,\varrho} (r^2+1)K\Sigma \\
&\quad = ((\log K)_{,\varrho} + \varrho(\log K)_{,\varrho\varrho})\,(-r\dot{r}\varrho K\Sigma + r\dot{r}\varrho K\Sigma) = 0,
\end{aligned}$$

was zur Folge hat, daß R_{2312} verschwindet. □

Satz 1.1. *Die Komponenten R_{ij} des Ricci–Tensors* Ric *der Riemannschen C^∞–Mannigfaltigkeiten (M^3_Γ, h_t) sind bezüglich des Schnittes* (1.3) *im Reperbündel durch*

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2\left(\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} 2t^4 & 0 & 0 \\ 0 & 2t^4 - \varrho^4(r^2+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4t^4 - \varrho^4(r^2+1)^2 \end{pmatrix}$$

gegeben und die Skalarkrümmung lautet

$$S = R_{11} + R_{22} + R_{33} = -\frac{\varrho^4(r^2+1)^2}{\left(\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4\right)^{3/2}}.$$

Beweis. Man berechnet

$$\begin{aligned}
(\log K)_{,\varrho} &= \frac{2t^4}{\left(\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4\right)\varrho}, \\
(\log K)_{,\varrho\varrho} &= -\frac{2t^4}{\left(\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4\right)\varrho^2} - \frac{8t^4\varrho^2(r^2+1)^2}{\left(\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4\right)^2}, \\
(\log \Sigma)_{,\varrho} &= -\frac{1}{\varrho} - \frac{t^4}{\left(\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4\right)\varrho} = -\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}, \\
(\log D)_{,\varrho} &= (\log K)_{,\varrho} + (\log \Sigma)_{,\varrho} = -\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho},
\end{aligned}$$

und erhält mittels vorangehender Proposition für die Komponenten $R_{ij} = \sum_{k=1}^{3} R_{ikkj}$ des Ricci–Tensors die Beziehungen

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{1}{2h_{22}}\Bigg[-\frac{1}{\varrho}(\log K)_{,\varrho} - (\log K)_{,\varrho\varrho} - (\log K)_{,\varrho}\left(-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right) \\
&\quad -2\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}(\log K)_{,\varrho} + \frac{1}{4}(\log K)^2_{,\varrho}\right) + 2\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho\varrho}\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{2h_{22}}\left(-(\log K)^2_{,\varrho} + 2\frac{1}{\varrho}(\log K)_{,\varrho}\right), \\
R_{22} &= \frac{1}{2h_{22}}\left[-\frac{1}{\varrho}(\log K)_{,\varrho} - (\log K)_{,\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho}\Big(2 + \varrho\,(\log K)_{,\varrho}\Big)\left(-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2h_{22}}\left(-\frac{1}{\varrho}(\log K)_{,\varrho} - (\log K)_{,\varrho\varrho} - \frac{2}{\varrho^2} + \frac{1}{2}(\log K)^2_{,\varrho}\right), \\
R_{33} &= \frac{1}{2h_{22}}\Bigg[-(\log K)_{,\varrho}\left(-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}(\log K)_{,\varrho} + \frac{1}{4}(\log K)^2_{,\varrho}\right) \\
&\quad +2\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho}\Big(2 + \varrho(\log K)_{,\varrho}\Big)\left(-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{2h_{22}}\left((\log K)_{,\varrho\varrho} - \frac{1}{2}(\log K)^2_{,\varrho} + \frac{3}{\varrho}(\log K)_{,\varrho} - \frac{2}{\varrho^2}\right);
\end{aligned}$$

die verbleibenden Koeffizienten sind gleich null. Wie die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors bleiben die Komponenten von Ric und S für den Fall, daß ϱ gegen null geht, bei expliziter Berechnung beschränkt. So ergibt sich

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{1}{\varrho^2(r^2+1)^2\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big)^{3/2}}\left(\frac{t^4}{\varrho^2}\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big) - \frac{t^8}{\varrho^2}\right) \\
&= \frac{t^4}{\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big)^{3/2}}, \\
R_{22} &= \frac{1}{2\varrho^2(r^2+1)^2\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big)^{3/2}}\Bigg(-\frac{t^4}{\varrho^2}\Big(\varrho^4(r^2+1)+t^4\Big) + \frac{t^8}{\varrho^2} \\
&\quad +\frac{t^4}{\varrho^2}\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big) + 4t^4\varrho^2(r^2+1)^2 - \frac{1}{\varrho^2}\Big(\varrho^8(r^2+1)^4 + t^8 + 2\varrho^4(r^2+1)^4\Big)\Bigg) \\
&= \frac{2t^4 - \varrho^4(r^2+1)^2}{2\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big)^{3/2}}, \\
R_{33} &= \frac{1}{2\varrho^2(r^2+1)^2\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big)^{3/2}}\Bigg(-\frac{t^4}{\varrho^2}\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big) - 4t^4\varrho^2(r^2+1)^2 \\
&\quad -\frac{t^8}{\varrho^2} + \frac{3t^4}{\varrho^2}\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big) - \frac{1}{\varrho^2}\Big(\varrho^8(r^2+1)^4 + t^8 + 2\varrho^4(r^2+1)^2t^4\Big)\Bigg) \\
&= \frac{-4t^4 - \varrho^4(r^2+1)^2}{2\Big(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4\Big)^{3/2}},
\end{aligned}$$

und man sieht, daß sich die divergenten Terme gegenseitig aufheben; damit sind die inneren Krümmungsgrößen der betrachteten Hyperflächen vollständig bestimmt. □

Die Skalarkrümmung S ist negativ und geht für großes ϱ und r wie $1/\varrho^2(r^2+1)$ gegen null. Für $t \neq 0$ bleiben alle Komponenten des Riemannschen Krmmungstensors und des Ricci–Tensors sowie S bei $\varrho = 0$ regulär und sind demnach überall auf den Riemannschen Mannigfaltigkeiten M^3_Γ definiert. Für $t = 0$ degeneriert die Skalarkrümmung bei $\varrho = 0$, der Tatsache entsprechend, daß die Hyperflächen M^3_Γ in diesem Fall nicht länger vollständig sind.

3. Die zweite Fundamentalform der Hyperflächen M^3_Γ

Wir gehen nun dazu über, die zweite Fundamentalform der Hyperflächen M^3_Γ zu studieren. Hierfür ist es erforderlich, den Levi–Civita–Zusammenenhang ∇^{H^2} des Eguchi–Hanson-Raumes (H^2, g_t) zu bestimmen. Er kann mittels der Koszul–Formel berechnet werden, welche für kommutierende Vektorfelder

$$2g_t(\nabla^{H^2}_X Y, Z) = X(g_t(Y,Z)) + Y(g_t(Y,Z)) - Z(g_t(X,Y))$$

lautet. Im folgenden werden wir die Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 der dichten, komplexen Mannigfaltigkeit $M^4 \subset H^2$ mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen, so daß die Komponenten von ∇^{H^2} auf M^4 durch die Relationen

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, g_{ik}}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, g_{jk}}{\partial\, x_i} - \frac{\partial\, g_{ij}}{\partial\, x_k}\right), \qquad \Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{ijl} \tag{1.9}$$

gegeben sind. Aufgrund der Symmetrie

$$g_{kl}(x_m) = g_{\bar{k}\bar{l}}(x_{\overline{m}}), \qquad \bar{k} := k+2 \mod 4 \tag{1.10}$$

der kovarianten Koeffizienten der Metrik erhält man für die Christoffel–Symbole die Relationen

$$\Gamma_{klm}(x_n) = \Gamma_{\bar{k}\bar{l}\overline{m}}(x_{\bar{n}}). \tag{1.11}$$

Die kontravarianten Koeffizienten g^{ij} von g_t sind durch die Matrix

$$g_t^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\det g_t}} \begin{pmatrix} G_2 & 0 & G_4 & G_3 \\ 0 & G_2 & -G_3 & G_4 \\ G_4 & -G_3 & G_1 & 0 \\ G_3 & G_4 & 0 & G_1 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei $\det g_t = (G_1G_2 - G_3^2 - G_4^2)^2 = 16$. Desweiteren berechnen sich die Ableitungen der Funktionen G und H zu

$$G_{,x_i} = -2x_i H, \qquad H_{,x_i} = -2x_i I$$

mit $I := 2t^4(3u_1^2+t^4)/u_1^3(u_1^2+t^4)^{3/2}$. Eine direkte Rechnung ergibt dann die Christoffel–Symbole erster Art.

Proposition 1.4. *Die Christoffel–Symbole erster Art des Eguchi–Hanson–Raumes* (H^2, g_t) *sind auf* M^4 *gegeben durch*

$$\Gamma_{111} = -x_1(2H - I(x_1^2+x_2^2)), \qquad \Gamma_{114} = -2I\left(x_1x_2x_3 + \frac{1}{2}x_4(x_2^2 - x_1^2)\right),$$

$$\Gamma_{112} = x_2(2H - I(x_1^2+x_2^2)), \qquad \Gamma_{131} = -x_3(H - I(x_1^2+x^2)),$$

$$\Gamma_{113} = 2I\left(x_1x_2x_4 + \frac{1}{2}x_3(x_1^2 - x_2^2)\right), \qquad \Gamma_{132} = x_4(H - I(x_1^2+x_2^2));$$

die verbleibenden Symbole lassen sich mittels dieser erhalten, indem man die Identitäten $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ *sowie die Relationen* (1.11) *zusammen mit den zusätzlichen Symmetrien*

$$\Gamma_{22i} = -\Gamma_{11i}, \qquad \Gamma_{44i} = -\Gamma_{33i}, \qquad \Gamma_{23i} = \Gamma_{14i}, \qquad \Gamma_{24i} = -\Gamma_{13i}$$

und

$$\begin{aligned} &\Gamma_{12i} = \Gamma_{11(i-1)}, &&\Gamma_{14i} = \Gamma_{13(i-1)}, &&\Gamma_{34i} = \Gamma_{33(i-1)} &&\textit{für gerades } i, \\ &\Gamma_{12i} = -\Gamma_{11(i+1)}, &&\Gamma_{14i} = -\Gamma_{13(i+1)}, &&\Gamma_{34i} = -\Gamma_{33(i+1)} &&\textit{für ungerades } i \end{aligned}$$

berücksichtigt. □

Die Christoffel–Symbole zweiter Art ergeben sich aus diesen Formeln wie in (1.9) angegeben. Aufgrund der Symmetrien des Levi–Civita–Zusammenhangs ∇^{H^2} ist es hinreichend, lediglich sechs von diesen explizit zu berechnen. So ist

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= -\frac{1}{4}x_1 G(2H - I(x_1^2+x_2^2)) + \frac{1}{4}H\Big[x_1(x_3^2+x_4^2)(2H - I(x_1^2+x_2^2)) \\ &+ 2I\Big[(x_1x_3+x_2x_4)\Big(x_1x_2x_4 + \frac{1}{2}x_3(x_1^2-x_2^2)\Big) \\ &- (x_1x_4 - x_2x_3)\Big(x_1x_2x_3 + \frac{1}{2}x_4(x_2^2-x_1^2)\Big)\Big]\Big] \\ &= x_1\Big[-\frac{1}{4}G(2H - I(x_1^2+x_2^2)) + \frac{1}{2}H^2(x_3^2+x_4^2) + \frac{1}{4}HI\Big[-(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2) \\ &+ (x_3^2+x_4^2)(x_1^2-x_2^2) + 2(x_2^2x_4^2 + x_2^2x_3^2)\Big]\Big] = x_1A_1, \end{aligned}$$

wobei wir die Funktion $A_1 = \frac{1}{2}H^2(x_3^2+x_4^2) - \frac{1}{4}G(2H - I(x_1^2+x_2^2))$. einführten. Auf ähnliche Weise erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{4}x_2 G(2H - I(x_1^2+x_2^2)) + \frac{1}{4}H\Big[-x_2(x_3^2+x_4^2)(2H - I(x_1^2+x_2^2)) \\ &+ 2I\Big[-(x_1x_4-x_2x_3)\Big(x_1x_2x_4 + \frac{1}{2}x_3(x_1^2-x_2^2)\Big) \\ &- (x_1x_3 + x_2x_4)\Big(x_1x_2x_3 + \frac{1}{2}x_4(x_2^2-x_1^2)\Big)\Big]\Big] \\ &= x_2\Big[\frac{1}{4}G(2H - I(x_1^2+x_2^2)) - \frac{1}{2}H^2(x_3^2+x_4^2) + \frac{1}{4}HI\Big[(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2) \\ &+ (x_3^2+x_4^2)(x_1^2-x_2^2) - 2(x_1^2x_4^2 + x_1^2x_3^2)\Big]\Big] = -x_2A_1. \end{aligned}$$

Desweiteren bestimmen sich die Christoffel–Symbole Γ^3_{11} und Γ^4_{11} gemäß

$$\begin{aligned} \Gamma^3_{11} &= \frac{1}{4}G\Gamma_{113} + \frac{1}{4}H\Big[-\Gamma_{113}(x_1^2+x_2^2) \\ &- (2H - I(x_1^2+x_2^2))\big[x_1(x_1x_3+x_2x_4) + x_2(x_1x_4 - x_2x_3)\big]\Big] \\ &= \frac{1}{4}G\Gamma_{113} - \frac{1}{2}H^2(2x_1x_2x_4 + x_3(x_1^2-x_2^2)) \\ &+ \frac{1}{4}H\Big[-\Gamma_{113}(x_1^2+x_2^2) + I(x_1^2+x_2^2)(2x_1x_2x_4 + x_3(x_1^2-x_2^2))\Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}C\bigg(x_1x_2x_4 + \frac{1}{2}x_3(x_1^2 - x_2^2)\bigg),\\
\Gamma_{11}^4 &= \frac{1}{4}G\Gamma_{114} + \frac{1}{4}H\Big[-\Gamma_{114}(x_1^2+x_2^2)\\
&\quad - (2H - I(x_1^2+x_2^2))\big[x_1(x_1x_4 - x_2x_3) - x_2(x_1x_3 + x_2x_4)\big]\Big]\\
&= \frac{1}{4}G\Gamma_{114} + \frac{1}{2}H^2(2x_1x_2x_3 + x_4(x_2^2 - x_1^2))\\
&\quad + \frac{1}{4}H\Big[-\Gamma_{114}(x_1^2+x_2^2) + I(x_1^2+x_2^2)(-2x_1x_2x_3 + x_4(x_1^2 - x_2^2))\Big]\\
&= -\frac{1}{2}C\bigg(x_1x_2x_3 + \frac{1}{2}x_4(x_2^2 - x_1^2)\bigg),
\end{aligned}
$$

wobei $C = (IG - 2H^2)$. Schließlich berechnet man

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{4}G\Gamma_{131} + \frac{1}{4}H\Big[-\Gamma_{131}(x_3^2+x_4^2)\\
&\quad + (H - I(x_3^2+x_4^2))\big[-x_1(x_2x_4 + x_1x_3) + x_2(x_1x_4 - x_2x_3)\big]\Big]\\
&= -\frac{1}{4}x_3\Big[G(H - I(x_1^2+x_2^2)) + H^2(-x_3^2 - x_4^2 + x_1^2 + x_2^2)\Big]\\
&\quad + \frac{1}{4}HI\Big[x_3(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2) - x_3(x_3^2+x_4^2)(x_1^2+x_2^2)\Big] = -x_3B_1,\\
\Gamma_{13}^2 &= \frac{1}{4}G\Gamma_{132} + \frac{1}{4}H\Big[-\Gamma_{132}(x_3^2+x_4^2)\\
&\quad + (H - I(x_3^2+x_4^2))\big[x_1(x_1x_4 - x_2x_3) + x_2(x_2x_4 + x_1x_3)\big]\Big]\\
&= \frac{1}{4}x_4\Big[G(H - I(x_1^2+x_2^2)) + H^2(-x_3^2 - x_4^2 + x_1^2 + x_2^2)\Big]\\
&\quad + \frac{1}{4}HI\Big[x_4(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2) - x_4(x_3^2+x_4^2)(x_1^2+x_2^2)\Big] = x_4B_1;
\end{aligned}
$$

dabei ist B_1 durch $B_1 = \frac{1}{4}\big[G(H - I(x_1^2+x_2^2)) + H^2(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)\big]$ gegeben. Unter Berücksichtigung der Relationen (1.10), (1.11) erhält man auf diese Weise folgende Proposition.

Proposition 1.5. *Die Komponenten Γ_{jk}^i des Levi–Civita–Zusammenhangs des Eguchi–Hanson–Raumes (H^2, g_t) sind auf M^4 gegeben durch*

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= x_1A_1, & \Gamma_{33}^3 &= x_3A_2,\\
\Gamma_{11}^2 &= -x_2A_1, & \Gamma_{33}^4 &= -x_4A_2,\\
\Gamma_{11}^3 &= \frac{C}{2}\bigg(x_1x_2x_4 + \frac{1}{2}x_3(x_1^2 - x_2^2)\bigg), & \Gamma_{33}^1 &= \frac{C}{2}\bigg(x_2x_3x_4 + \frac{1}{2}x_1(x_3^2 - x_4^2)\bigg),\\
\Gamma_{11}^4 &= -\frac{C}{2}\Big(x_1x_2x_3 + \frac{1}{2}x_4(x_2^2 - x_1^2)\Big), & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{C}{2}\bigg(x_1x_3x_4 + \frac{1}{2}x_2(x_4^2 - x_3^2)\bigg),\\
\Gamma_{13}^1 &= -x_3B_1, & \Gamma_{13}^3 &= -x_1B_2,\\
\Gamma_{13}^2 &= x_4B_1, & \Gamma_{13}^4 &= x_2B_2,
\end{aligned}
$$

wobei

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}H^2(x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{4}G(2H - I(x_1^2 + x_2^2)),\\
B_1 &= \frac{1}{4}\Big[G(H - I(x_1^2 + x_2^2)) + H^2(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)\Big],\\
A_2 &= \frac{1}{2}H^2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{4}G(2H - I(x_3^2 + x_4^2)),\\
B_2 &= \frac{1}{4}\Big[G(H - I(x_3^2 + x_4^2)) + H^2(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)\Big]
\end{aligned}$$

und $C = (IG - 2H^2)$. *Alle verbleibenden* Γ^i_{jk} *können aus den obigen unter Verwendung der Identitäten* $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ *sowie der Relationen*

$$\Gamma^i_{22} = -\Gamma^i_{11}, \qquad \Gamma^i_{44} = -\Gamma^i_{33}, \qquad \Gamma^i_{23} = \Gamma^i_{14}, \qquad \Gamma^i_{24} = -\Gamma^i_{13}$$

und

$$\begin{aligned}
&\Gamma^i_{12} = \Gamma^{(i-1)}_{11}, \quad \Gamma^i_{14} = \Gamma^{(i-1)}_{13}, \quad \Gamma^i_{34} = \Gamma^{(i-1)}_{33} \qquad \textit{für gerades } i,\\
&\Gamma^i_{12} = -\Gamma^{(i+1)}_{11}, \quad \Gamma^i_{14} = -\Gamma^{(i+1)}_{13}, \quad \Gamma^i_{34} = -\Gamma^{(i+1)}_{33} \qquad \textit{für ungerades } i
\end{aligned}$$

berechnet werden. □

Um die äußere Geometrie der Hyperflächen M^3_Γ zu beschreiben, bestimmen wir zuerst ein Einheitsnormalenvektorfeld $N : M^3_\Gamma \to (TM^3_\Gamma)^\perp$ an M^3_Γ. Bis auf Orientierung ist ein solches auf $M^3_\Gamma \cap M^4$ durch die Bedingungen

$$g_t(Y_i, N) = 0, \quad i = 1,2,3, \qquad g_t(N,N) = 1$$

gegeben, welche äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{gathered}
N_1(u\cos\varphi - v\sin\varphi)K + N_2(v\cos\varphi + u\sin\varphi)K + N_3K\cos\varphi + N_4K\sin\varphi = 0,\\
-N_1(u\sin\varphi + v\cos\varphi)K - N_2(v\sin\varphi - u\cos\varphi)K - N_3K\sin\varphi + N_4K\cos\varphi = 0,\\
\Big\{N_1(\dot u\cos\varphi - \dot v\sin\varphi) + N_2(\dot v\cos\varphi + \dot u\sin\varphi)\Big\}(K + H\varrho^2) - N_3\Big(\cos\varphi(v\dot v + u\dot u)\\
+ \sin\varphi(\dot u v - \dot v u)\Big)H\varrho^2 - N_4\Big(\sin\varphi(v\dot v + u\dot u) - \cos\varphi(\dot u v - \dot v u)\Big)H\varrho^2 = 0,\\
(N_1^2 + N_2^2)(K + H\varrho^2) + (N_3^2 + N_4^2)(K + H\varrho^2 r^2) + 2(N_4N_1 - N_3N_2)v\varrho^2 H\\
-2(N_3N_1 + N_4N_2)u\varrho^2 H = 0
\end{gathered}$$

sind. Löst man diese Gleichungen bezüglich der Komponenten N_i des Normalenvektors, erhält man folgende Proposition.

Proposition 1.6. *Der Normalenvektor der Hyperflächen* (M^3_Γ, h_t) *ist auf* $M^3_\Gamma \cap M^4$ *bis auf Orientierung gegeben durch*

$$N = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}(w_1, -w_2, -rw_3, rw_4),$$

wobei die Funktionen w_i

$$\begin{aligned}
w_1 &= \dot v\cos\varphi + \dot u\sin\varphi, & w_2 &= \dot u\cos\varphi - \dot v\sin\varphi,\\
w_3 &= \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi_\Gamma\cos\varphi, & w_4 &= \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi_\Gamma\sin\varphi
\end{aligned}$$

lauten. □

Wir bemerken, daß w_2 und w_1 als Real– bzw. Imaginärteil von $\dot{\Gamma}(s)e^{i\varphi}$, w_4 und w_3 als Real– bzw. Imaginärteil von $\dot{\Gamma}(s)e^{i\varphi}e^{-i\varphi_\Gamma}$ aufgefaßt werden können. Nach Konstruktion sind die Hyperflächen M^3_Γ in H^2 eingebettet. Bezeichnet N das oben bestimmte Einheitsnormalenvektorfeld, so ist die zweite Fundamentalform von M^3_Γ durch

$$\mathrm{II} : \mathcal{X}(M^3_\Gamma) \times \mathcal{X}(M^3_\Gamma) \longrightarrow \mathcal{F}(M^3_\Gamma), \qquad \mathrm{II}(X,Y) = g_t(X, \nabla^{H^2}_Y N) \tag{1.12}$$

definiert. Sie ist symmetrisch und bilinear. Im folgenden werden wir die Koordinaten s, ϱ, φ mit η_1, η_2, η_3 bezeichnen, und die Komponenten von II bezüglich des induzierten Koordinatenrepers mit II_{ij}. Der Kürze halber werden wir für ∇^{H^2} für den Rest des Abschnittes ∇ schreiben. Explizit ist

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_{\eta_j}} N(p) &= \Big(\partial_{\eta_j} N_i(p) + N_i(p)\, \nabla_{\partial_{\eta_j}} \Big)\, \partial_{x_i}\,|_p, \\ \nabla_{\partial_{\eta_j}} \partial_{x_i}\,|_p &= dx_k(\partial_{\eta_j})(p)\, \Gamma^l_{ki}(p)\, \partial_{x_l}\,|_p, \end{aligned} \tag{1.13}$$

wobei $p \in M^3_\Gamma \cap M^4$. Auf $M^3_\Gamma \cap M^4$ können die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 mittels der Koordinaten s, φ, ϱ gemäß

$$x_1 = \varrho\,\zeta_1, \qquad x_2 = \varrho\,\zeta_2, \qquad x_3 = \varrho\,\cos\varphi, \qquad x_4 = \varrho\,\sin\varphi$$

ausgedrückt werden; dabei setzten wir

$$\zeta_1 := u\cos\varphi - v\sin\varphi, \qquad \zeta_2 := v\cos\varphi + u\sin\varphi.$$

Die in den Ausdrücken für die Γ^i_{jk} auftretenden Polynome lassen sich somit als

$$\begin{aligned} \Big[x_1x_2x_4 + \frac{1}{2}x_3(x_1^2 - x_2^2)\Big]|_{M^3_\Gamma} &= \varrho^3\Big[-uv\sin\varphi + (u^2-v^2)\frac{1}{2}\cos\varphi\Big], \\ \Big[x_1x_2x_3 + \frac{1}{2}x_4(x_2^2 - x_1^2)\Big]|_{M^3_\Gamma} &= \varrho^3\Big[uv\cos\varphi + (u^2-v^2)\frac{1}{2}\sin\varphi\Big], \\ \Big[x_2x_3x_4 + \frac{1}{2}x_1(x_3^2 - x_4^2)\Big]|_{M^3_\Gamma} &= \frac{\varrho^3}{2}[v\sin\varphi + u\cos\varphi], \\ \Big[x_1x_3x_4 + \frac{1}{2}x_2(x_4^2 - x_3^2)\Big]|_{M^3_\Gamma} &= \frac{\varrho^3}{2}[u\sin\varphi - v\cos\varphi] \end{aligned}$$

schreiben. Wir berechnen nun die kovarianten Ableitungen $\nabla_{\partial_{\eta_i}} N$. Zu diesem Zweck bemerken wir zuerst die Relationen

$$\begin{aligned} w_3\cos\varphi - w_4\sin\varphi &= r\dot{\varphi}_\Gamma, & w_4\cos\varphi + w_3\sin\varphi &= \dot{r}, \\ w_2\cos\varphi + w_1\sin\varphi &= \dot{u}, & w_1\cos\varphi - w_2\sin\varphi &= \dot{v}, \\ \zeta_1 w_2 + w_1\zeta_2 &= r\dot{r}, & \zeta_1 w_1 - \zeta_2 w_2 &= r^2\dot{\varphi}_\Gamma. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Wegen

$$\begin{aligned} r\dot{u} &= r(\dot{r}\cos\varphi_\Gamma - r\dot{\varphi}_\Gamma\sin\varphi_\Gamma) = \dot{r}u - r\dot{\varphi}_\Gamma v, \\ r\dot{v} &= r(\dot{r}\sin\varphi_\Gamma + r\dot{\varphi}_\Gamma\cos\varphi_\Gamma) = \dot{r}v + r\dot{\varphi}_\Gamma u \end{aligned}$$

gelten weiterhin die Gleichungen

$$rw_1 = \cos\varphi(\dot{r}v + r\dot{\varphi}_\gamma u) + \sin\varphi(\dot{r}u - r\dot{\varphi}_\Gamma v) = uw_3 + vw_4, \tag{1.15a}$$

$$rw_2 = \cos\varphi(\dot{r}u - r\dot{\varphi}_\gamma v) - \sin\varphi(\dot{r}v + r\dot{\varphi}_\Gamma u) = -vw_3 + uw_4, \tag{1.15b}$$

und somit

$$rw_3 = \cos\varphi_\Gamma(uw_3 + vw_4) - \sin\varphi_\Gamma(-vw_3 + uw_4) = uw_1 - vw_2, \tag{1.15c}$$

$$rw_4 = \sin\varphi_\Gamma(uw_3 + vw_4) + \cos\varphi_\Gamma(-vw_3 + uw_4) = w_1v + w_2u. \tag{1.15d}$$

Proposition 1.7.

$$\nabla_{\partial_s} N = \sum_{i=1}^{4} (N_{i,s} + \Phi(\dot r N_i + r\dot\varphi_\Gamma N_{i,\varphi}))\, \partial_{x_i} = N_{,s} + \Phi(\dot r N + r\dot\varphi_\Gamma N_{,\varphi}),$$

wobei $\Phi = -\frac{1}{4} H K \varrho^2 r$.

Beweis. Unter Berücksichtigung der Symmetrien der Christoffel–Symbole Γ^k_{ij} erhält man

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_s} N &= \sum_{i=1}^{4} \Big[N_{i,s} + \sum_{k=1}^{4} N_k \left(\Gamma^i_{1k} \varrho w_2 + \Gamma^i_{2k} \varrho w_1 \right) \Big]\, \partial_{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{4} \Big[N_{i,s} + \varrho \Gamma^i_{11}(N_1 w_2 - N_2 w_1) + \varrho \Gamma^i_{12}(N_2 w_2 + N_1 w_1) \\
&+ \varrho \Gamma^i_{13}(N_3 w_2 - N_4 w_1) + \varrho \Gamma^i_{14}(N_4 w_2 + N_3 w_1) \Big]\, \partial_{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{4} \Big[N_{i,s} + \varrho \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}} (2\Gamma^i_{11} w_1 w_2 + \Gamma^i_{12}(w_1^2 - w_2^2) \\
&+ \Gamma^i_{13} r(-w_3 w_2 - w_4 w_1) + \Gamma^i_{14} r(w_4 w_2 - w_3 w_1)) \Big]\, \partial_{x_i}\, .
\end{aligned}$$

Die erste Komponente von $\nabla_{\partial_s} N$ lautet

$$dx_1(\nabla_{\partial_s} N) = N_{1,s} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\, \varrho^2 r (A_1 + B_1)(\dot r w_1 + r\dot\varphi_\Gamma w_2),$$

da aufgrund der Relationen (1.14)

$$\begin{aligned}
2\Gamma^1_{11} w_1 w_2 + \Gamma^1_{12}(w_1^2 - w_2^2) &= A_1 \varrho (2\zeta_1 w_1 w_2 + \zeta_2 (w_1^2 - w_2^2)) \\
&= A_1 \varrho \big[w_1(\zeta_1 w_2 + w_1 \zeta_2) + w_2(\zeta_1 w_1 - \zeta_2 w_2) \big] \\
&= A_1 \varrho r (\dot r w_1 + r\dot\varphi_\Gamma w_2), \\
\Gamma^1_{13} r(-w_3 w_2 - w_4 w_1) + \Gamma^1_{14} r(w_4 w_2 - w_3 w_1)& \\
&= B_1 \varrho r \big[\cos\varphi (w_2 w_3 + w_1 w_4) - \sin\varphi (w_4 w_2 - w_3 w_1) \big] \\
&= B_1 \varrho r \big[w_2(w_3 \cos\varphi - w_4 \sin\varphi) + w_1(w_4 \cos\varphi + w_3 \sin\varphi) \big] \\
&= B_1 \varrho r (w_2 r \dot\varphi_\Gamma + w_1 \dot r)
\end{aligned}$$

gilt. Da weiterhin

$$\begin{aligned}
2\Gamma^2_{11} w_1 w_2 + \Gamma^2_{12}(w_1^2 - w_2^2) &= A_1 \varrho (-2\zeta_2 w_1 w_2 + \zeta_1 (w_1^2 - w_2^2)) \\
&= A_1 \varrho \big[w_1(-\zeta_2 w_2 + w_1 \zeta_2) + w_2(-\zeta_2 w_1 - \zeta_1 w_2) \big] \\
&= A_1 \varrho r (-\dot r w_2 + r\dot\varphi_\Gamma w_1), \\
\Gamma^2_{13} r(-w_3 w_2 - w_4 w_1) + \Gamma^2_{14} r(w_4 w_2 - w_3 w_1)& \\
&= B_1 \varrho r \big[\sin\varphi (-w_2 w_3 - w_1 w_4) - \cos\varphi (w_4 w_2 - w_3 w_1) \big] \\
&= B_1 \varrho r \big[w_1(-w_4 \sin\varphi + w_3 \sin\varphi) + w_2(-w_3 \sin\varphi + w_4 \cos\varphi) \big] \\
&= B_1 \varrho r (w_1 r \dot\varphi_\Gamma - w_2 \dot r),
\end{aligned}$$

ist die zweite Komponente entsprechend durch

$$dx_2(\nabla_{\partial_s}N) = N_{2,s} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^2 r(A_1+B_1)(-\dot{r}w_2 + r\dot{\varphi}_\Gamma w_1)$$

gegeben. Was die dritte Komponente anbelangt, so berechnet man unter Benutzung von (1.15)

$$\begin{aligned}
2\Gamma^3_{11}w_1w_2 + \Gamma^3_{12}(w_1^2 - w_2^2) &= \frac{1}{2}\varrho^3 C\left[\left(-uv\sin\varphi + \frac{u^2-v^2}{2}\cos\varphi\right)2w_1w_2\right.\\
&\quad\left.+\left(uv\cos\varphi + \frac{u^2-v^2}{2}\sin\varphi\right)(w_1^2-w_2^2)\right]\\
&= \frac{1}{2}\varrho^3 C\Big[uv\Big(w_1(-w_2\sin\varphi + w_1\cos\varphi) + w_2(-w_1\sin\varphi - w_2\cos\varphi)\Big)\\
&\quad+\frac{u^2-v^2}{2}\Big(w_1(w_2\cos\varphi + w_1\sin\varphi) + w_2(w_1\cos\varphi - w_2\sin\varphi)\Big)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\varrho^3 C\left[uv(w_1\dot{v} - w_2\dot{u}) + \frac{u^2-v^2}{2}(w_1\dot{u} + w_2\dot{v})\right]\\
&= \frac{1}{2}\varrho^3 C\left[\frac{vw_1}{2}(\dot{v}u - \dot{u}v) + \frac{uw_2}{2}(-\dot{u}v + \dot{v}u) + \frac{uw_1}{2}(v\dot{v} + u\dot{u}) - \frac{vw_2}{2}(u\dot{u} + v\dot{v})\right]\\
&= \frac{1}{4}\varrho^3 C[(vw_1 + uw_2)r^2\dot{\varphi}_\Gamma + (uw_1 - vw_2)r\dot{r}] = \frac{1}{4}r^2\varrho^3 C(r\dot{\varphi}_\Gamma w_4 + \dot{r}w_3)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\Gamma^3_{13}r(-w_3w_2 - w_4w_1) + \Gamma^3_{14}r(w_4w_2 - w_3w_1)\\
&\quad= B_2\varrho r\big[-\zeta_1(-w_2w_3 - w_1w_4) - \zeta_2(w_4w_2 - w_3w_1)\big]\\
&\quad= B_2\varrho r\big[w_3(\zeta_1w_2 + \zeta_2w_1) + w_4(\zeta_1w_1 - \zeta_2w_2)\big] = B_2\varrho r^2(w_3\dot{r} + w_4r\dot{\varphi}_\Gamma),
\end{aligned}$$

so daß

$$dx_3(\nabla_{\partial_s}N) = N_{3,s} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^2 r^2\left(\frac{1}{4}\varrho^2 C + B_2\right)(\dot{r}w_3 + r\dot{\varphi}_\Gamma w_4).$$

Auf dieselbe Weise verifiziert man, daß

$$\begin{aligned}
&\Gamma^4_{13}r(-w_3w_2 - w_4w_1) + \Gamma^4_{14}r(w_4w_2 - w_3w_1)\\
&\quad= B_2\varrho r\big[\zeta_2(-w_2w_3 - w_1w_4) - \zeta_1(w_4w_2 - w_3w_1)\big]\\
&\quad= B_2\varrho r\big[-w_4(\zeta_1w_2 + \zeta_2w_1) + w_3(\zeta_1w_1 - \zeta_2w_2)\big] = B_2\varrho r^2(-w_4\dot{r} + w_3r\dot{\varphi}_\Gamma)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
2\Gamma^4_{11}w_1w_2 + \Gamma^4_{12}(w_1^2 - w_2^2) &= \frac{1}{2}\varrho^3 C\left[-\left(uv\cos\varphi + \frac{u^2-v^2}{2}\sin\varphi\right)2w_1w_2\right.\\
&\quad\left.+\left(-uv\sin\varphi + \frac{u^2-v^2}{2}\cos\varphi\right)(w_1^2-w_2^2)\right]\\
&= \frac{1}{2}\varrho^3 C\Big[uv\Big(w_1(-w_2\cos\varphi - w_1\sin\varphi) + w_2(-w_1\cos\varphi + w_2\sin\varphi)\Big)\\
&\quad+\frac{u^2-v^2}{2}\Big(w_1(-w_2\sin\varphi + w_1\cos\varphi) + w_2(-w_1\sin\varphi - w_2\cos\varphi)\Big)\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\varrho^3 C\Big[uv(-w_1\dot u - w_2\dot v) + \frac{u^2-v^2}{2}(w_1\dot v - w_2\dot u)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\varrho^3 C\Big[\frac{vw_1}{2}(-\dot u u - \dot v v) + \frac{uw_2}{2}(-\dot v v - \dot u u) + \frac{uw_1}{2}(-v\dot u + u\dot v) - \frac{vw_2}{2}(-u\dot v + v\dot u)\Big]\\
&= \frac{1}{4}\varrho^3 C\Big[-(vw_1+uw_2)r\dot r + (uw_1 - vw_2)r^2\dot\varphi_\Gamma\Big] = \frac{1}{4}r^2\varrho^3 C(-\dot r w_4 + r\dot\varphi_\Gamma w_3)
\end{aligned}$$

gilt, und man erhält letztlich für die vierte Komponente

$$dx_4(\nabla_{\partial_s}N) = N_{4,s} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^2 r^2\left(\frac{1}{4}\varrho^2 C + B_2\right)(-\dot r w_4 + r\dot\varphi_\Gamma w_3).$$

Der angegebene Ausdruck für $\nabla_{\partial_s}N$ ergibt sich dann, indem man die Identitäten

$$\begin{aligned}
A_1 + B_1 &= \frac{1}{4}(H^2\varrho^2(r^2+1) - GH) = -\frac{1}{4}HK,\\
\frac{1}{4}C\varrho^2 + B_2 &= \frac{1}{4}(IG - 2H^2)\varrho^2 + \frac{1}{4}\big(G(H - I\varrho^2) - H^2\varrho^2(r^2-1)\big)\\
&= \frac{1}{4}H(G - H\varrho^2(r^2+1)) = \frac{1}{4}HK
\end{aligned}$$

berücksichtigt und beachtet, daß die Ableitungen $N_{i,\varphi}$ der Komponenten des Normalenvektors bezüglich φ durch die Komponenten N_i gemäß

(1.16) $\qquad N_{i,\varphi} = N_{i-1}$ for i gerade, $\qquad N_{i,\varphi} = -N_{i+1}$ for i ungerade

gegeben sind, und die Behauptung ist bewiesen. Zu bemerken sei an dieser Stelle, daß aufgrund der Relation $\nabla g_t = 0$ für alle Vektorfelder $Y \in \mathcal{X}(M^3_\Gamma)$ die Beziehung $g_t(N, \nabla_Y N) = 0$ gilt, und tatsächlich zeigt eine Rechnung, daß der Normalenanteil von $\nabla_{\partial_s}N$ verschwindet. ☐

Proposition 1.8.

$$\nabla_{\partial_\varrho}N = 0.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_\varrho}N &= \sum_{i=1}^4\Big[N_{i,\varrho} + \sum_{k=1}^4 N_k\left(\Gamma^i_{1k}\zeta_1 + \Gamma^i_{2k}\zeta_2 + \Gamma^i_{3k}\cos\varphi + \Gamma^i_{4k}\sin\varphi\right)\Big]\partial_{x_i}\\
&= \sum_{i=1}^4\Big[N_{i,\varrho} + \Gamma^i_{11}(N_1\zeta_1 - N_2\zeta_2) + \Gamma^i_{12}(N_2\zeta_1 + N_1\zeta_2)\\
&\quad + \Gamma^i_{13}(N_3\zeta_1 - N_4\zeta_2 + N_1\cos\varphi - N_2\sin\varphi)\\
&\quad + \Gamma^i_{14}(N_4\zeta_1 + N_3\zeta_2 + N_2\cos\varphi + N_1\sin\varphi)\\
&\quad + \Gamma^i_{33}(N_3\cos\varphi - N_4\sin\varphi) + \Gamma^i_{34}(N_4\cos\varphi + N_3\sin\varphi)\Big]\partial_{x_i}\,.
\end{aligned}$$

Abermals berechnen wir die Komponenten von $\nabla_{\partial_\varrho}N$ einzeln. Unter Benutzung der Symmetrien der Γ^i_{jk} und (1.14), (1.15) erhält man

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11}(N_1\zeta_1 - N_2\zeta_2) + \Gamma^1_{12}(N_2\zeta_1 + N_1\zeta_2)\\
&\quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}A_1\varrho\big[\zeta_1(w_1\zeta_1 + w_2\zeta_2) + \zeta_2(-w_2\zeta_1 + w_1\zeta_2)\big] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}A_1\varrho r^2 w_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{13}\big(N_3\zeta_1 - N_4\zeta_2 + N_1\cos\varphi - N_2\sin\varphi\big) + \Gamma^1_{14}\big(N_4\zeta_1 + N_3\zeta_2 + N_2\cos\varphi + N_1\sin\varphi\big)\\
&\quad = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}B_1\varrho\Big[\cos\varphi\big(r(-w_3\zeta_1 - w_4\zeta_2) + w_1\cos\varphi + w_2\sin\varphi\big)\\
&\quad + \sin\varphi\big(r(w_4\zeta_1 - w_3\zeta_2) - w_2\cos\varphi + w_1\sin\varphi\big)\Big]\\
&\quad = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}B_1\varrho\Big[w_1 + rw_4(\zeta_1\sin\varphi - \zeta_2\cos\varphi) - rw_3(\zeta_2\sin\varphi + \zeta_1\cos\varphi)\Big]\\
&\quad = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}B_1\varrho[w_1 + rw_4(-v) - rw_3u] = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}B_1\varrho(1-r^2)w_1,\\
&\Gamma^1_{33}(N_3\cos\varphi - N_4\sin\varphi) + \Gamma^1_{34}(N_4\cos\varphi + N_3\sin\varphi)\\
&\quad = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}r\varrho^3C\Bigg[\left(\frac{v}{2}\sin\varphi + \frac{u}{2}\cos\varphi\right)(-w_3\cos\varphi - w_4\sin\varphi)\\
&\quad + \left(\frac{u}{2}\sin\varphi - \frac{v}{2}\cos\varphi\right)(w_4\cos\varphi - w_3\sin\varphi)\Bigg]\\
&\quad = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}r\varrho^3C(-uw_3 - vw_4) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}r^2\varrho^3Cw_1,
\end{aligned}$$

und hiermit

$$dx_1(\nabla_{\partial_\varrho}N) = N_{1,\varrho} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho\left((A_1+B_1)r^2 - \left(B_1 + \frac{1}{4}\varrho^2r^2C\right)\right)w_1.$$

Die zweite Komponente erhält man, indem man

$$\begin{aligned}
&\Gamma^2_{11}(N_1\zeta_1 - N_2\zeta_2) + \Gamma^2_{12}(N_2\zeta_1 + N_1\zeta_2)\\
&\quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}A_1\varrho\big[-\zeta_2(w_1\zeta_1 + w_2\zeta_2) + \zeta_1(-w_2\zeta_1 + w_1\zeta_2)\big]\\
&\quad = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}A_1\varrho r^2w_2,\\
&\Gamma^2_{13}\big(N_3\zeta_1 - N_4\zeta_2 + N_1\cos\varphi - N_2\sin\varphi\big) + \Gamma^2_{14}\big(N_4\zeta_1 + N_3\zeta_2 + N_2\cos\varphi + N_1\sin\varphi\big)\\
&\quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}B_1\varrho\Big[\sin\varphi\big(r(-w_3\zeta_1 - w_4\zeta_2) + w_1\cos\varphi + w_2\sin\varphi\big)\\
&\quad - \cos\varphi\big(r(w_4\zeta_1 - w_3\zeta_2) - w_2\cos\varphi + w_1\sin\varphi\big)\Big]\\
&\quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}B_1\varrho\Big[w_2 - rw_4(\zeta_2\sin\varphi + \zeta_1\cos\varphi) + rw_3(\zeta_2\cos\varphi - \zeta_1\sin\varphi)\Big]\\
&\quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}B_1\varrho[w_2 - rw_4u + rw_3v] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}B_1\varrho(1-r^2)w_2,\\
&\Gamma^2_{33}(N_3\cos\varphi - N_4\sin\varphi) + \Gamma^2_{34}(N_4\cos\varphi + N_3\sin\varphi)\\
&\quad \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}r\varrho^3C\Bigg[-(\frac{u}{2}\sin\varphi - \frac{v}{2}\cos\varphi)(-w_3\cos\varphi - w_4\sin\varphi)\\
&\quad + (\frac{v}{2}\sin\varphi + \frac{u}{2}\cos\varphi)(w_4\cos\varphi - w_3\sin\varphi)\Bigg]\\
&\quad = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}r\varrho^3C(-vw_3 + uw_4) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}r^2\varrho^3Cw_2
\end{aligned}$$

berechnet, so daß

$$dx_2(\nabla_{\partial_\varrho} N) = N_{2,\varrho} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho\left(-(A_1+B_1)r^2 + \left(B_1 + \frac{1}{4}\varrho^2 r^2 C\right)\right) w_2.$$

Auf ähnliche Weise verifiziert man

$$\begin{aligned}
&\Gamma^3_{11}(N_1\zeta_1 - N_2\zeta_2) + \Gamma^3_{12}(N_2\zeta_1 + N_1\zeta_2)\\
&\quad= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 C\Big[\Big(-uv\sin\varphi + \frac{u^2-v^2}{2}\cos\varphi\Big)(w_1\zeta_1 + w_2\zeta_2)\\
&\quad+\Big(uv\cos\varphi + \frac{u^2-v^2}{2}\sin\varphi\Big)(-w_2\zeta_1 + w_1\zeta_2)\Big]\\
&\quad= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 C\Big[-uv\big(w_1(\zeta_1\sin\varphi - \zeta_2\cos\varphi) + w_2(\zeta_2\sin\varphi + \zeta_1\cos\varphi)\big)\\
&\quad+\frac{u^2-v^2}{2}\big(w_1(\zeta_1\cos\varphi + \zeta_2\sin\varphi) + w_2(\zeta_2\cos\varphi - \zeta_1\sin\varphi)\big)\Big]\\
&\quad= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 C\Big[-uv(-vw_1 + uw_2) + \frac{u^2-v^2}{2}(uw_1 + vw_2)\Big]\\
&\quad= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 C\frac{u^2+v^2}{2}(uw_1 - vw_2) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 r^3 C w_3,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\Gamma^3_{13}\big(N_3\zeta_1 - N_4\zeta_2 + N_1\cos\varphi - N_2\sin\varphi\big) + \Gamma^3_{14}\big(N_4\zeta_1 + N_3\zeta_2 + N_2\cos\varphi + N_1\sin\varphi\big)\\
&\quad\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho B_2\Big[-\zeta_1\big(r(-w_3\zeta_1 - w_4\zeta_2) + w_1\cos\varphi + w_2\sin\varphi\big)\\
&\quad-\zeta_2\big(r(w_4\zeta_1 - w_3\zeta_2) - w_2\cos\varphi + w_1\sin\varphi\big)\Big]\\
&\quad= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho B_2\Big[w_1(-\zeta_1\cos\varphi - \zeta_2\sin\varphi) + w_2(-\zeta_1\sin\varphi + \zeta_2\cos\varphi) + rw_3(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\Big]\\
&\quad= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho B_2(-uw_1 + vw_2 + r^3 w_3) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho r(r^2-1)B_2 w_3,\\
&\Gamma^3_{33}(N_3\cos\varphi - N_4\sin\varphi) + \Gamma^3_{34}(N_4\cos\varphi + N_3\sin\varphi)\\
&\quad= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho r A_2\Big[\cos\varphi(-w_3\cos\varphi - w_4\sin\varphi) + \sin\varphi(w_4\cos\varphi - w_3\sin\varphi)\Big]\\
&\quad= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho r A_2 w_3,
\end{aligned}$$

und man erhält für die dritte Komponente von $\nabla_{\partial_\varrho} N$ den Ausdruck

$$dx_3(\nabla_{\partial_\varrho} N) = N_{3,\varrho} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho r\left(-(A_2+B_2) + \left(B_2 + \frac{1}{4}\varrho^2 C\right)r^2\right) w_3.$$

Eine letzte Rechnung ergibt dann

$$\begin{aligned}
&\Gamma^4_{11}(N_1\zeta_1 - N_2\zeta_2) + \Gamma^4_{12}(N_2\zeta_1 + N_1\zeta_2)\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 C\Big[-\Big(uv\cos\varphi + \frac{u^2-v^2}{2}\sin\varphi\Big)(w_1\zeta_1 + w_2\zeta_2)\\
&+\Big(-uv\sin\varphi + \frac{u^2-v^2}{2}\cos\varphi\Big)(-w_2\zeta_1 + w_1\zeta_2)\Big]\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 C\Big[uv\big(w_1(-\zeta_1\cos\varphi - \zeta_2\sin\varphi) + w_2(-\zeta_2\cos\varphi + \zeta_1\sin\varphi)\big)\\
&+\frac{u^2-v^2}{2}\big(w_1(-\zeta_1\sin\varphi + \zeta_2\cos\varphi) + w_2(-\zeta_2\sin\varphi - \zeta_1\cos\varphi)\big)\Big]\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 C\Big[uv(-uw_1 - vw_2) + \frac{u^2-v^2}{2}(vw_1 - uw_2)\Big]\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 C\frac{u^2+v^2}{2}(-vw_1 - uw_2) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^3 r^3 C w_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Gamma^4_{13}\big(N_3\zeta_1 - N_4\zeta_2 + N_1\cos\varphi - N_2\sin\varphi\big) + \Gamma^4_{14}\big(N_4\zeta_1 + N_3\zeta_2 + N_2\cos\varphi + N_1\sin\varphi\big)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho B_2\Big[\zeta_2\big(r(-w_3\zeta_1 - w_4\zeta_2) + w_1\cos\varphi + w_2\sin\varphi\big)\\
&-\zeta_1\big(r(w_4\zeta_1 - w_3\zeta_2) - w_2\cos\varphi + w_1\sin\varphi\big)\Big] =\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho B_2\Big[w_1(\zeta_2\cos\varphi - \zeta_1\sin\varphi) + w_2(\zeta_2\sin\varphi + \zeta_1\cos\varphi) + rw_4(-\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho B_2(vw_1 + uw_2 - r^3 w_4) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho r(r^2-1)B_2 w_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Gamma^4_{33}(N_3\cos\varphi - N_4\sin\varphi) + \Gamma^4_{34}(N_4\cos\varphi + N_3\sin\varphi)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho r A_2\Big[-\sin\varphi(-w_3\cos\varphi - w_4\sin\varphi) + \cos\varphi(w_4\cos\varphi - w_3\sin\varphi)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho r A_2 w_4,
\end{aligned}$$

und die vierte Komponente liest sich

$$dx_4(\nabla_{\partial_\varrho}N) = N_{4,\varrho} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho r\left(A_2 + B_2 - \left(B_2 + \frac{1}{4}\varrho^2 C\right)r^2\right)w_4.$$

Da

$$\begin{aligned}
A_2 + B_2 &= \frac{1}{2}H^2\varrho^2 r^2 - \frac{1}{4}G(H - I\varrho^2) + \frac{1}{4}G(H - I\varrho^2) - \frac{1}{4}H^2\varrho^2(r^2+1)\\
&= -\frac{1}{4}H(G - H\varrho^2(r^2+1)) = -\frac{1}{4}HK,\\
B_1 + \frac{1}{4}\varrho^2 r^2 C &= \frac{1}{4}\Big[G(H - I\varrho^2 r^2) + H^2\varrho^2(r^2-1)\Big] + \frac{1}{4}\varrho^2 r^2(IG - 2H^2) = \frac{1}{4}HK,
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung, indem man schließlich bemerkt, daß $N_{i,\varrho} = \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}N_i$ und

$$2(\log K)_{,\varrho} - HK\varrho(r^2+1) = 0.$$

□

Als letztes berechnen wir die kovariante Ableitung von N bezüglich ∂_φ.

Proposition 1.9.

$$\nabla_{\partial_\varphi} N = \sum_{i=1}^{4} \Xi N_{i,\varphi}\, \partial_{x_i} = \Xi N_{,\varphi},$$

wobei $\Xi = 1 - \frac{1}{4} HK\varrho^2(r^2+1)$.

Beweis. Abermals gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_\varphi} N &= \sum_{i=1}^{4} \Big[N_{i,\varphi} + \sum_{k=1}^{4} N_k \big[-\varrho\zeta_2 \Gamma^i_{1k} + \varrho\zeta_1\Gamma^i_{2k} - \varrho\sin\varphi\Gamma^i_{3k} + \varrho\cos\varphi\Gamma^i_{4k}\big]\Big]\,\partial_{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{4} \Big[N_{i,\varphi} + \varrho\Gamma^i_{11}(-\zeta_2 N_1 - \zeta_1 N_2) + \varrho\Gamma^i_{12}(-\zeta_2 N_2 + \zeta_1 N_1) \\
&\quad + \varrho\Gamma^i_{13}\big(-\zeta_2 N_3 - N_1\sin\varphi - \zeta_1 N_4 - N_2\cos\varphi\big) \\
&\quad + \Gamma^i_{14}\varrho\big(-\zeta_2 N_4 + N_1\cos\varphi + \zeta_1 N_3 - N_2\sin\varphi\big) \\
&\quad + \varrho\Gamma^i_{33}(-N_3\sin\varphi - N_4\cos\varphi) + \Gamma^i_{34}\varrho(-N_4\sin\varphi + N_3\cos\varphi)\Big]\,\partial_{x_i}\,.
\end{aligned}$$

Infolge der Symmetrien der Γ^i_{kj} ergibt sich für ungerades i, daß

$$dx_i(\nabla_{\partial_\varphi} N) - N_{i,\varphi} = -\varrho(dx_{i+1}(\nabla_{\partial\,\varrho} N) - N_{i+1,\varrho}),$$

und man erhält für die erste und dritte Komponente die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
dx_1(\nabla_{\partial_\varphi} N) &= N_{1,\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^2\left((A_1+B_1)r^2 - \left(B_1 + \frac{1}{4}\varrho^2 r^2 C\right)\right) w_2, \\
dx_3(\nabla_{\partial_\varphi} N) &= N_{3,\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^2 r\left(-(A_2+B_2) + \left(B_2 + \frac{1}{4}\varrho^2 C\right) r^2\right) w_4.
\end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhält man für gerades i

$$dx_i(\nabla_{\partial_\varphi} N) - N_{i,\varphi} = \varrho(dx_{i-1}(\nabla_{\partial\,\varrho} N) - N_{i-1,\varrho}),$$

und somit für die zweite und vierte Komponente

$$\begin{aligned}
dx_2(\nabla_{\partial_\varphi} N) &= N_{2,\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^2\left((A_1+B_1)r^2 - \left(B_1 + \frac{1}{4}\varrho^2 r^2 C\right)\right) w_1, \\
dx_4(\nabla_{\partial_\varphi} N) &= N_{4,\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\varrho^2 r\left(-(A_2+B_2) + \left(B_2 + \frac{1}{4}\varrho^2 C\right) r^2\right) w_3,
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. Erneut zeigt eine Rechnung, daß $g_t(N, \nabla_{\partial_\varphi} N) = 0$. □

Wir sind nun in der Lage, die zweite Fundamentalform der Hyperflächen M^3_Γ zu berechnen.

Satz 1.2. *Die Komponenten der zweiten Fundamentalform der Riemannschen C^∞–Mannigfaltigkeiten (M^3_Γ, h_t) sind bezüglich des Koordinatenrepers $(\partial_s, \partial_\varrho, \partial_\varphi)$, siehe Abschnitt 2, gegeben durch*

$$\mathrm{II} = \frac{\varrho}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\begin{pmatrix} G(\dot u\ddot v - \dot v\ddot u) - 2H\varrho^2(u\dot v - v\dot u) & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Vermöge (1.12) und (1.13) berechnet man mittels Proposition 1.7

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_{11} &= \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx_i(\partial_s) dx_j(\nabla_{\partial_s} N) = \varrho\Big[(N_{3,s} + \Phi(\dot r N_3 + r\dot\varphi_\Gamma N_{3,\varphi}))(-w_2 G_4 + w_1 G_3)\\
&+(N_{4,s} + \Phi(\dot r N_4 + r\dot\varphi_\Gamma N_{4,\varphi}))(-w_2 G_3 + w_1 G_4)\\
&+\big((N_{1,s} + \Phi(\dot r N_1 + r\dot\varphi_\Gamma N_{1,\varphi}))w_2 + (N_{2,s} + \Phi(\dot r N_2 + r\dot\varphi_\Gamma N_{2,\varphi}))w_1\big)G_1\Big]\\
&= \varrho\Big[H\varrho^2\big[\Phi(-r\dot r(N_3 w_4 + N_4 w_3) + r^2\dot\varphi_\Gamma(N_4 w_4 - N_3 w_3))\\
&-r(N_{3,s} w_4 + N_{4,s} w_3)\big] + (G - H\varrho^2 r^2)\big[(N_{1,s} w_2 + w_1 N_{2,s})\\
&+\Phi(\dot r(N_1 w_2 + N_2 w_1) + r\dot\varphi_\Gamma(-N_2 w_2 + N_1 w_1))\big]\Big],
\end{aligned}$$

wobei wir von den Beziehungen (1.16) sowie von

$$\begin{aligned}
-w_2 G_4 + w_1 G_3 &= (-w_2 u - w_1 v)\varrho^2 H = -r w_4 \varrho^2 H,\\
-w_2 G_3 - w_1 G_4 &= (w_2 v - w_1 u)\varrho^2 H = -r w_3 \varrho^2 H
\end{aligned}$$

Gebrauch machten. Da weiterhin $N_3 w_4 + N_4 w_3 = 0$, $N_1 w_2 + N_2 w_1 = 0$ und

$$\begin{aligned}
N_4 w_4 - N_3 w_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\, r(w_3^2 + w_4^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\, r\\
-N_2 w_2 + N_1 w_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}(w_1^2 + w_2^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}
\end{aligned}$$

gilt, erhalten wir für obigen Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_{11} &= H\varrho^3\left[\Phi r^3\dot\varphi_\Gamma \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}} - r\left(-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\, r\right)_{,s}(w_3 w_4 - w_4 w_3)\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\, r(-w_{3,s} w_4 + w_{4,s} w_3)\right)\right] + \varrho(G - H\varrho^2 r^2)\left[\Phi r\dot\varphi_\Gamma \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\right.\\
&\left.+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\, r\right)_{,s}(w_1 w_2 - w_2 w_1) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}(w_{1,s} w_2 - w_{2,s} w_1)\right]\\
&= \frac{\varrho}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\Big[H r^2\varrho^2\big(\Phi\dot\varphi_\Gamma r - r\dot\varphi\ddot r + \dot r(\dot r\dot\varphi_\Gamma + r\ddot\varphi_\Gamma)\big)\\
&+ (\Phi r\dot\varphi_\Gamma + \dot u\ddot v - \dot v\ddot u)(G - H\varrho^2 r^2)\Big]\\
&= \frac{\varrho}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\big[G(\Phi r\dot\varphi_\gamma + \dot u\ddot v - \dot v\ddot u) - H\varrho^2 r^2\dot\varphi_\Gamma\big].
\end{aligned}$$

Dabei machten wir von den Beziehungen $-w_{3,s} w_4 + w_{4,s} w_3 = -\dot r(\dot r\dot\varphi_\Gamma + r\ddot\varphi_\Gamma) + r\dot\varphi_\Gamma\ddot r$ und $w_{1,s} w_2 - w_{2,s} w_1 = \dot u\ddot v - \dot v\ddot u$ sowie von

$$\dot u\ddot v - \dot v\ddot u = \dot\varphi_\Gamma + \dot r(\dot r\dot\varphi_\Gamma + r\ddot\varphi_\Gamma) - r\dot\varphi_\Gamma\ddot r$$

Gebrauch. Da $G\Phi r\dot\varphi_\Gamma = -\frac{1}{4}GHK\varrho^2 r^2\dot\varphi_\Gamma = -H\varrho^2 r^2\dot\varphi_\Gamma$, erhält man schließlich

$$\mathrm{II}_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\,\varrho\big[G(\dot u\ddot v - \dot v\ddot u) - 2H\varrho^2(u\dot v - v\dot u)\big],$$

wobei wir $r^2\dot\varphi_\Gamma = u\dot v - v\dot u$ benutzten. Nach Proposition 1.8 ist

$$\mathrm{II}_{22} = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx_i(\partial_\varrho) dx_j(\nabla_{\partial_\varrho} N) = 0,$$

und indem man zusätzlich zu den obigen Relationen die Identitäten

$$\begin{aligned} G_4 w_3 - G_3 w_4 &= (uw_3 + vw_4)\varrho^2 H = r\varrho^2 w_1 H, \\ -G_3 w_3 - G_4 w_4 &= (vw_3 - uw_4)\varrho^2 H = -r\varrho^2 w_2 H \end{aligned}$$

heranzieht, sieht man, daß auch II_{33} verschwindet, da wegen (1.16)

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_{33} &= \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx_i(\partial_\varphi) dx_j(\nabla_{\partial_\varphi} N) \\ &= \Xi\Big[-\varrho\zeta_2(G_1N_{1,\varphi} - G_4N_{3,\varphi} - G_3N_{4,\varphi}) + \varrho\zeta_1(G_1N_{2,\varphi} + G_3N_{3,\varphi} - G_4N_{4,\varphi}) \\ &\quad -\varrho\sin\varphi(-G_4N_{1,\varphi} + G_3N_{2,\varphi} + G_2N_{3,\varphi}) \\ &\quad +\varrho\cos\varphi(-G_3N_{1,\varphi} - G_4N_{2,\varphi} + G_2N_{4,\varphi})\Big] \\ &= \Xi\Big[-\varrho\zeta_2(-G_1N_2 + G_4N_4 - G_3N_3) + \varrho\zeta_1(G_1N_1 - G_3N_4 - G_4N_3) \\ &\quad -\varrho\sin\varphi(G_4N_2 + G_3N_1 - G_2N_4) + \varrho\cos\varphi(G_3N_2 - G_4N_1 + G_2N_3)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\,\Xi\varrho\Big[G_1(\zeta_1w_1 - \zeta_2w_2) + G_2r(-w_3\cos\varphi + w_4\sin\varphi) \\ &\quad +\zeta_1r(G_4w_3 - G_3w_4) + \zeta_2r(-G_3W_3 - G_4w_4) \\ &\quad +\cos\varphi(-G_4w_1 - G_3w_2) + \sin\varphi(-G_3w_1 + G_4w_2)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\,\Xi\varrho\Big[(G - H\varrho^2r^2)r^2\dot\varphi_\Gamma - (G - H\varrho^2)r^2\dot\varphi_\Gamma \\ &\quad +H\varrho^2r(\zeta_1w_1r - \zeta_2w_2r - w_3\cos\varphi + w_4\sin\varphi)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\,\Xi\varrho\Big[(-H\varrho^2r^2 + H\varrho^2)r^2\dot\varphi_\Gamma + H\varrho^2r(r^3\dot\varphi_\Gamma - r\dot\varphi_\Gamma)\Big] = 0 \end{aligned}$$

unter Benutzung von Proposition 1.9 gilt. Analog ist

$$\mathrm{II}_{12} = g_t(\partial_s, \nabla_{\partial_\varrho} N) = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx_i(\partial_s) dx_j(\nabla_{\partial_\varrho} N) = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_{13} &= g_t(\partial_s, \nabla_{\partial_\varphi} N) = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx_1(\partial_s) dx_j(\nabla_{\partial_\varphi} N) \\ &= \Xi\varrho[N_{3,\varphi}(-G_4w_2 + G_3w_1) + N_{4,\varphi}(-G_3w_2 - G_4w_1) + G_1(N_{1,\varphi}w_2 + N_{2,\varphi}w_1)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Xi\varrho\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}[-rw_4(-r\varrho^2 w_4 H) - rw_3(-r\varrho^2 w_3 H) + G_1(w_1^2+w_2^2)] \\
&= \Xi\varrho\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}[r^2\varrho^2 H + G - H\varrho^2 r^2] \\
&= \varrho\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\left(1 - \frac{1}{4}HK\varrho^2(r^2+1)\right)G = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}K.
\end{aligned}
$$

Schließlich ist

$$
\mathrm{II}_{32} = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij}dx_i(\partial_\varphi)dx_j(\nabla_{\partial_\varrho}N) = 0.
$$

Die verbleibenden Komponenten sind durch die Symmetrie von II bestimmt. □

Um die Invarianten von II zu bestimmen, ist es erforderlich, die zweite Fundamentalform bezüglich des Orthonormalrepers Y_1, Y_2, Y_3 auszudrücken. In diesem Fall bezeichnen wir deren Komponenten mit II^*_{ij}. Seien $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ die Eigenwerte von II in besagter Basis, aufgefaßt als symmetrische Transformation auf TM^3_Γ. Die mittlere Krümmung, die erste mit II assoziierte elementar symmetrische Funktion, ist dann durch die Summe $\mathfrak{H} = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \mathrm{II}^*_{11} + \mathrm{II}^*_{22} + \mathrm{II}^*_{33}$ gegeben. Indem man $Y_i = a_{ij}\,\partial_{\eta_j}$ schreibt, erhält man

$$
\mathrm{II}^*_{ij} = g_t(Y_i, \nabla_{Y_j}N) = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ik}a_{jl}g_t(\partial_{\eta_k}, \nabla_{\partial_{\eta_l}}N) = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ik}a_{jl}\,\mathrm{II}_{kl}, \tag{1.17}
$$

also in Matrizenschreibweise, $\mathrm{II}^* = A \cdot \mathrm{II} \cdot {}^T\!A$, wobei die Koeffizienten von $A = (a_{ij})_{i,j}$ durch die Gleichungen (1.3) bestimmt sind. Als eine Folge obigen Theorems erhalten wir folgendes Resultat.

Korollar 1.1. *Die mittlere Krümmung der Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) ist gegeben durch*

$$
\mathfrak{H} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}}\cdot k_g,
$$

wobei $k_g := \big((\dot u\ddot v - \dot v\ddot u)(r^2+1) - 2(u\dot v - v\dot u)\big)/2$ die geodätische Krümmung der Kurve Γ in S^2 bezeichnet. Insbesondere ist M^3_Γ eine Minimalfläche genau dann, falls $k_g = 0$, d.h. wenn Γ ein Großkreis in S^2 ist.

Beweis. Man verifiziert sofort $\mathrm{II}^*_{11} = \mathrm{II}^*_{22} = 0$ sowie

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}^*_{33} = D^2\,\mathrm{II}_{11} + 2DF\,\mathrm{II}_{13} &= \frac{\varrho}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}(r^2+1)K^2\Sigma^2\big[(r^2+1)G(\dot u\ddot v - \dot v\ddot u) \\
&\quad - 2(u\dot v - v\dot u)(H(r^2+1)\varrho^2 + K)\big] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}}\big[(\dot u\ddot v - \dot v\ddot u)(r^2+1) - 2(u\dot v - v\dot u)\big].
\end{aligned}
$$

Damit ist $\mathfrak{H} = \mathrm{II}^*_{33}$. Ferner bemerken wir, daß $\mathrm{II}^*_{12} = \mathrm{II}^*_{13} = 0$ und

$$
\mathrm{II}^*_{23} = \frac{\varrho}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}\frac{DK}{\sqrt{h_{33}}} = \frac{K}{4\varrho}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}} = \frac{(r^2+1)\varrho^2}{\sqrt{2}(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^{3/4}}.
$$

Wir berechnen die geodätische Krümmung von der Kurve Γ, welche wir vermöge der stereographischen Projektion als eine Kurve in $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auffassen. Bezüglich der Koordinaten u, v lautet die auf S^2 induzierte Metrik

$$g_{S^2} = \frac{1}{(r^2+1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Schreiben wir v_1, v_2 für u, v, so ist die geodätische Krümmung von Γ in S^2 gegeben durch (siehe beispielsweise [**15**])

$$k_g = \sqrt{\det g_{S^2}} \begin{vmatrix} \dot v_1 & \dot v_2 \\ \ddot v_1 + \sum\limits_{i,j=1}^{2} \Gamma^1_{ij} \dot v_i \dot v_j & \ddot v_2 + \sum\limits_{i,j=1}^{2} \Gamma^2_{ij} \dot v_i \dot v_j \end{vmatrix} / (g_{ij} \dot v_i \dot v_j)^{3/2},$$

wobei die Christoffel–Symbole Γ^i_{jk} sich aus den Formeln (1.9) ergeben; dort sind nun unter g_{ij} die Komponenten von g_{S^2} zu verstehen und die Koordinaten x_i durch die entsprechenden v_i zu ersetzen. Man beachte, daß $\dot v_1^2 + \dot v_2^2 = 1$. Wir setzen $L := (r^2+1)^2$, $M := -4/(r^2+1)^3$ und erhalten

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{LM}{2} v_1, & \Gamma^2_{11} &= -\frac{LM}{2} v_2, \\ \Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = \frac{LM}{2} v_2, & \Gamma^1_{22} &= -\frac{LM}{2} v_1; \end{aligned}$$

eine direkte Rechnung ergibt dann

$$\begin{vmatrix} \dot v_1 & \dot v_2 \\ \ddot v_1 + \sum\limits_{i,j=1}^{2} \Gamma^1_{ij} \dot v_i \dot v_j & \ddot v_2 + \sum\limits_{i,j=1}^{2} \Gamma^2_{ij} \dot v_i \dot v_j \end{vmatrix} = \dot v_1 \ddot v_2 - \dot v_2 \ddot v_1 + \frac{M}{2L}(v_1 \dot v_2 - v_2 \dot v_1),$$

so daß man wegen $LM/2 = -2/(r^2+1)$ und $g_{ij}\dot v_i \dot v_j = \sqrt{\det g_{S^2}} = 1/L$ bis auf ein Vorzeichen schließlich

$$k_g = \frac{1}{2}\Big((\dot u \ddot v - \dot v \ddot u)(r^2+1) - 2(u\dot v - v\dot u) \Big)$$

erhält. Damit folgt die Behauptung. □

Die dritte mit II assoziierte elementar symmetrische Funktion entspricht der Gaußschen Krümmung; sie ist durch $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \kappa_3 = \det \mathrm{II}^*$ gegeben und damit gleich null; die zweite ist die sogenannte homogene Krümmung zweiter Ordnung.

Korollar 1.2. *Die homogene Krümmung zweiter Ordnung der Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) ist gleich einem Achtel der Skalarkrümmung,*

$$\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3 = -\frac{\varrho^4(r^2+1)^2}{8(\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4)^{3/2}} = S/8.$$

Beweis. Wie im Beweis des vorangehenden Korollar berechnet wurde, sind die Komponenten von II bezüglich des Orthonormalrepers (1.3) durch

$$\mathrm{II}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K}{4\varrho}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}} \\ 0 & \frac{K}{4\varrho}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}} & \mathfrak{H} \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms

$$\det(\mathrm{II}^* - \kappa \mathbf{1}) = -\kappa\big(-\kappa(\mathfrak{H} - \kappa) - K^3/16\varrho^2(r^2+1) \big)$$

bestimmen sich dann zu $\kappa_1 = 0$, $\kappa_{2,3} = (-\mathfrak{H} \pm \sqrt{\mathfrak{H}^2 + K^3/16\varrho^2(r^2+1)})/2$. □

Da $u_{1|M^3_\Gamma} = \varrho^2(r^2+1)^2$, sind die drei mit der zweiten Fundamentalform assoziierten elementar symmetrischen Funktionen, also im wesentlichen $\mathfrak{H}$ und die Skalarkrümmung S, offensichtlich invariant unter der Wirkung der Isometriegruppe $\mathrm{U}(2)$. Die Tatsache, daß die mittlere Krümmung der Hyperflächen M^3_Γ sich mittels der geodätischen Krümmung von Γ in S^2 ausdrücken läßt, erscheint natürlich, da die Geometrie des Vektorbündels $T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ durch die elliptische Geometrie von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ bestimmt ist. Man beachte dabei, daß $\dot{u}\ddot{v} - \dot{v}\ddot{u}$ die geodätische Krümmung von Γ als eine Kurve in $\mathbb{C}$, mit der euklidischen Metrik versehen, ist.
Als eine unmittelbare Konsequenz erhalten wir folgende Aussage.

Korollar 1.3. *Sei Γ eine Kurve in S^2 mit beschränkter geodätischer Krümmung. Dann bleibt das Funktional*

$$\int \mathfrak{H}^\alpha \, dM^3_\Gamma = \int \mathfrak{H}^\alpha \sqrt{\det h_t}\, ds \wedge d\varrho \wedge d\varphi$$

für $\alpha > 3$ beschränkt. Auf ähnliche Weise ist

$$\int (\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3)^\beta \, dM^3_\Gamma$$

für $\beta > 3/2$ endlich.

Folglich bleibt das Willmore–Funktional $\int \mathfrak{H}^3 \, dM^3_\Gamma$ unbeschränkt, so daß die Hyperflächen M^3_Γ der Integralgeometrie nicht zugänglich sind.

4. Der geodätische Fluß der Hyperflächen M^3_Γ

In diesem Abschnitt werden wir die Struktur des geodätischen Flusses der Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) studieren und deren exponentielles Wachstum $\mu_\infty(M^3_\Gamma)$ zumindest für den Fall, daß Γ ein Kurve in $\mathbb{C}$ ist, welche durch eine Möbius–Transformation aus einem Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung hervorgeht, explizit berechnen. Allgemein ist das *exponentielle Wachstum* einer offenen, vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) definiert als

$$\mu_\infty := \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{vol}\,(B_R(q_0)),$$

wobei q_0 ein Punkt in M^n ist und $\mathrm{vol}\,(B_R(q_0))$ das Volumen der geodätischen Kugel vom Radius R um q_0 bezeichnet. Für den Fall, daß $\mu_\infty = 0$, spricht man davon, daß M^n *subexponentielles Wachstum* hat. Ist das Volumen von M^n endlich, so ist diese Größe uninteressant, da dann stets $\mu_\infty = 0$ gilt, doch für $\mathrm{vol}\,(M^n) = \infty$ steht das exponentielle Wachstum unmittelbar mit dem Infimum des wesentlichen Spektrums des Laplace–Operators auf M^n in Verbindung. Wir werden auf diesen Zusammenhang in Abschnitt 4 von Teil 2 zurückkommen. Insbesondere werden wir dort in der Lage sein, daß exponentielle Wachstum von (M^3_Γ, h_t) für beliebige geschlossene Kurven zu berechnen.
Sei $\gamma(\tau) = \Psi(s(\tau), \varrho(\tau), \varphi(\tau))$ eine glatte Kurve in M^3_Γ und $X(\tau) = \sum_{j=1}^3 X^j(\tau)\, \partial/\partial_{\eta_j}$ ein Vektorfeld längs $\gamma(\tau)$. Dessen kovariante Ableitung bezüglich γ ist durch die Formel

$$\frac{\nabla X}{dt} = \sum_{k=1}^3 \Big(\frac{d}{dt} X^k(\tau) + \sum_{i,j=1}^3 \Gamma^i_{jk} X^i(\tau)\dot{\gamma}^j(\tau) \Big)\, \partial_{\eta_k}$$

gegeben, wobei $\Gamma^i_{jk} = h_t(\nabla_{\partial_{\eta_i}} \partial_{\eta_j}, \partial_{\eta_k})$ die Komponenten des Levi–Civita–Zusammenhangs von M^3_Γ bezüglich des Koordinatenrepers $\{\partial_s, \partial_\varrho, \partial_\varphi\}$ bezeichnen. Nach Definition gilt für eine geodätische Linie $\nabla\dot\gamma(\tau)/dt = 0$ und man erhält das Differentialgleichungssystem

$$\ddot\gamma^k(\tau) + \sum_{i,j=1}^{3} \Gamma^k_{ij}(\gamma(\tau))\dot\gamma^i(\tau)\dot\gamma^j(\tau) = 0, \qquad k = 1,2,3. \tag{1.19}$$

Nun ist

$$h_t^{-1} = \frac{1}{\det h_t}\begin{pmatrix} h_{22}h_{33} & -h_{12}h_{33} & -h_{13}h_{22} \\ -h_{12}h_{33} & h_{11}h_{33} - h_{13}^2 & h_{12}h_{13} \\ -h_{13}h_{22} & h_{12}h_{13} & h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \end{pmatrix},$$

und die Christoffel–Symbole zweiter Art können auf übliche Weise mit Hilfe der Formeln (1.9), die nun auf (M^3_Γ, h_t) ausgewertet und bezüglich der Koordinaten η_i zu verstehen sind, berechnet werden. Obwohl es sich als einfacher herausstellt, die geodätischen Linien der Hyperflächen M^3_Γ mittels des Studiums der ersten Integrale des geodätischen Flusses zu bestimmen, führen wir das Ergebnis der oben erwähnten Rechnungen explizit an.

Proposition 1.10. *Die Komponenten des Levi–Civita–Zusammenhangs der Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) bezüglich der Koordinatenrepers $\{\partial_s, \partial_\varrho, \partial_\varphi\}$ sind gegeben durch*

$$\Gamma^1_{11} = \frac{K}{4}\left(\frac{r\dot r\varrho}{r^2+1}G_{,\varrho} - Kr^2(r\dot r\dot\varphi_\Gamma^2 + \dot r\ddot r + r^2\dot\varphi_\Gamma\ddot\varphi_\Gamma)\right),$$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{11} &= \frac{\varrho r}{(r^2+1)^2}\Big(\ddot r(r^2+1) - r\dot\varphi_\Gamma^2(2r^2+1-r^4) + \frac{K^2r^2}{4}\Big(\dot\varphi_\Gamma r k_g + \ddot r(r^2+1)\Big)\Big)\\ &\quad + \frac{\varrho^2 r^2}{2}(\log K)_{,\varrho}\frac{3\dot r^2 - r^4\dot\varphi_\Gamma^2}{(r^2+1)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{11} &= \frac{K^2}{4}\left(-\frac{r^3\dot r}{(r^2+1)^2}k_g + \ddot\varphi_\Gamma r^2 + \frac{2r^3\dot r}{r^2+1}\dot\varphi_\Gamma\left(\frac{1}{r^2+1} + \frac{1}{\varrho}\right)\right.\\ &\quad \left. + \frac{t^4}{\varrho^4(r^2+1)^3}\left(2\ddot\varphi_\Gamma r^2 + \frac{r^3\dot r\dot\varphi_\Gamma}{r^2+1}\left(6 + \frac{4}{r^2}\right)\right)\right);\end{aligned}$$

die verbleibenden sind von einfacherer Gestalt und man berechnet

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}, & \Gamma^1_{13} &= 0,\\ \Gamma^2_{12} &= \frac{r\dot r\varrho}{r^2+1}(\log K)_{,\varrho}, & \Gamma^2_{13} &= -\frac{\dot\varphi_\Gamma r^2\varrho^2}{r^2+1}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right),\\ \Gamma^3_{12} &= \frac{\dot\varphi_\Gamma r^2}{r^2+1}(\log K)_{,\varrho}, & \Gamma^3_{13} &= \frac{r\dot r\varrho}{r^2+1}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\right),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{22} &= 0, & \Gamma^1_{23} &= 0, & \Gamma^1_{33} &= 0,\\ \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}, & \Gamma^2_{23} &= 0, & \Gamma^2_{33} &= -\varrho - \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}\varrho^2,\\ \Gamma^3_{22} &= 0, & \Gamma^3_{23} &= \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}, & \Gamma^3_{33} &= 0.\end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun das geodätische System $(TM^3_\Gamma, \mathcal{E})$ von M^3_Γ, wobei die Lagrange–Funktion $\mathcal{E}$ durch die Metrik gemäß

$$\mathcal{E} : TM^3_\Gamma \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \frac{1}{2} h_t(X, X)$$

gegeben ist. Die Funktion $\mathcal{E}$ ist ein erstes Integral des geodätischen Flusses, d. h. bezüglich des Koordinatenrepers $\{\partial_s, \partial_\varrho, \partial_\varphi\}$ ist

$$\mathcal{E}(\dot\gamma(\tau)) = \frac{1}{2}\big[h_{11}\dot s^2(\tau) + 2(h_{12}\dot s(\tau)\dot\varrho(\tau) + h_{13}\dot s(\tau)\dot\varphi(\tau)) + h_{22}\dot\varrho^2(\tau) + h_{33}\dot\varphi^2(\tau)\big] \equiv \mathcal{E}$$

konstant für jede beliebige Geodätische. Sei nun $p = \Psi(s, \varrho, \varphi)$ und $z = e^{i\tau} \in S^1$. Da die Koeffizienten der Metrik h_t nicht von der Winkelvariablen φ abhängen, stellt die S^1–Wirkung

$$\kappa_z : M^3_\Gamma \cap M^4 \longrightarrow M^3_\Gamma \cap M^4, \kappa_z(p) = \Psi(s, \varrho, (\varphi + \tau) \bmod 2\pi),$$

eine einparametrige Familie von Isometrien dar. Demzufolge ist nach dem Satz von Noether die Funktion

$$\mathcal{M}_1 : T(M^3_\Gamma \cap M^4) \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{M}_1(X) := h_t\Big(\frac{d}{d\tau}\kappa_z(p)_{|\tau=0}, X\Big) = h_t(\partial_\varphi, X)_{|p},$$

ein zweites erstes Integral des geodätischen Flusses und man berechnet

$$\mathcal{M}_1(\dot\gamma(\tau)) = h_{13}\dot s(\tau) + h_{33}\dot\varphi(\tau) \equiv \mathcal{M}_1. \tag{1.20}$$

Für den Fall, daß $\dot s = 0$ und $\dot\varphi = 0$ ist, kann unmittelbar mittels der Gleichungen (1.19) für eine Geodätische oder der Relation $\mathcal{E}(\dot\gamma(\tau)) \equiv \mathcal{E}$ eingesehen werden, daß für

$$\dot\varrho^2 = \frac{2\mathcal{E}}{(r^2+1)K} = \mathcal{E}\frac{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}}{\varrho^2(r^2+1)^2}, \qquad s, \varphi \quad \text{konstant,} \tag{1.21}$$

die Kurve $\gamma(\tau) = \Psi(s, \varrho(\tau), \varphi)$ eine geodätische Linie in M^3_Γ ist.
Wir werden von nun an annehmen, daß $r(s) \equiv r_0$ konstant ist, und in diesem Fall den Abstand eines Punktes $p = \Psi(s, \varrho, \varphi)$ zu der Menge $\Gamma \equiv \{[0, 0]\} \subset M^3_\Gamma$ bestimmen. Da $r(s) \equiv r_0$ und $\dot\varphi_\Gamma(s) = \epsilon/r_0$, $\epsilon = \pm 1$, konstant sind, hängen die Koeffizienten h_{ij} ebenfalls nicht von s ab, so daß

$$\mu_z : M^3_\Gamma \cap M^4 \longrightarrow M^3_\Gamma \cap M^4,\ \mu_z(p) = \Psi((s + \tau\, r) \bmod 2\pi r, \varrho, \varphi),$$

eine weitere einparametrige Familie von Isometrien darstellt und wir, abermals nach dem Satz von Noether, ein drittes erstes Integral

$$\mathcal{M}_2 : T(M^3_\Gamma \cap M^4) \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{M}_2(X) := h_t\Big(\frac{d}{d\tau}\mu_z(p)_{|\tau=0}, X\Big) = h_t(\partial_s, X)_{|p},$$

erhalten; für eine beliebige Geodätische ist somit

$$\mathcal{M}_2(\dot\gamma(\tau)) = h_{11}\dot s(\tau) + h_{13}\dot\varphi(\tau) \equiv \mathcal{M}_2 \tag{1.22}$$

ebenfalls konstant. Mittels der Gleichungen (1.20), (1.22) erhält man

$$2\mathcal{E} = K(r^2+1)\dot\varrho^2 + \mathcal{M}_1\dot\varphi + \mathcal{M}_2\dot s \tag{1.23}$$

sowie

$$\dot s = \epsilon\frac{\mathcal{M}_1 - (r^2+1)K\varrho^2\dot\varphi}{r\varrho^2 K}, \qquad \dot\varphi = \epsilon\frac{\mathcal{M}_2 - (K + H\varrho^2)\varrho^2\dot s}{r\varrho^2 K}.$$

Löst man die beiden letzten Gleichungen nach $\dot\varphi$ und $\dot s$ auf, so ergibt sich einerseits

$$\begin{aligned}\dot\varphi &= \left(\epsilon\mathcal{M}_2 - \frac{(K+H\varrho^2)\varrho^2\mathcal{M}_1}{rK\varrho^2}\right)(r\varrho^2K-(K+H\varrho^2)\varrho^2(r^2+1)/r)^{-1}\\ &= \frac{(4+GH\varrho^2)\mathcal{M}_1-4\epsilon\mathcal{M}_2r}{4\varrho^2G}\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\dot s &= \frac{\epsilon}{4KG\varrho^2r}[4G\mathcal{M}_1-(r^2+1)(4(\mathcal{M}_1-\epsilon\mathcal{M}_2r)K+4\varrho^2H\mathcal{M}_1)]\\ &= \frac{\epsilon}{16\varrho^2r}[4(G-K(r^2+1)-H\varrho^2(r^2+1))\mathcal{M}_1+4\epsilon(r^2+1)rK\mathcal{M}_2]\\ &= \frac{-\epsilon r\mathcal{M}_1+(r^2+1)\mathcal{M}_2}{4\varrho^2}K;\end{aligned}$$

die Funktionen $s=s(\tau)$ und $\varphi=\varphi(\tau)$ sind somit durch die Funktion $\varrho=\varrho(\tau)$ bestimmt. Gleichung (1.23) lautet nun

$$2\mathcal{E} = \frac{1}{G}\left[4(r^2+1)\dot\varrho^2+\frac{1}{4\varrho^2}\Big(4(\mathcal{M}_1^2-2\epsilon\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2r+(r^2+1)\mathcal{M}_2^2)+GH\varrho^2\mathcal{M}_1^2\Big)\right].$$

Man beachte, daß $\mathcal{M}_1^2-2\epsilon\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2r+(r^2+1)\mathcal{M}_2^2=(\mathcal{M}_1-\epsilon\mathcal{M}_2r)^2+\mathcal{M}_2^2$ nicht negativ ist. Setzt man die Ausdrücke für G und H in die vorangehende Gleichung ein, so erhält man schließlich folgende gewöhnliche Differentialgleichung für $\varrho=\varrho(\tau)$:

(1.24)
$$\dot\varrho^2 = \frac{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}{\varrho^2(r^2+1)^2}\mathcal{E}-\frac{1}{4\varrho^2(r^2+1)}\left(\frac{t^4\mathcal{M}_1^2}{\varrho^4(r^2+1)^3}+(\mathcal{M}_1-\epsilon\mathcal{M}_2r)^2+\mathcal{M}_2^2\right).$$

Man erkennt somit, daß für $r(s)\equiv r_0$ sämtliche Geodätischen $\gamma(\tau)=\Psi(s(\tau),\varrho(\tau),\varphi(\tau))$ in $M^3_\Gamma\cap M^4$ durch die drei Parameter $\mathcal{E},\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ charakterisiert sind. Wir sind nun in der Lage, den Abstand eines Punktes $p\in M^3_\Gamma$ zur Kurve Γ zu berechnen.

Proposition 1.11. *Sei $\Gamma=\partial B(0,r)$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ vom Radius $r=r_0$. Der Abstand eines Punktes $p_0=\Psi(s_0,\varrho_0,\varphi_0)$ in (M^3_Γ,h_t) zur Kurve $\Gamma\subset M^3_\Gamma$ ist dann gegeben durch*

$$\text{(1.25)}\qquad dist(p_0,\Gamma)=\frac{1}{t\sqrt2}\varrho_0^2(r_0^2+1)\mathcal{F}\Big(1/2,1/4,3/2,-\frac{\varrho_0^4(r_0^2+1)^2}{t^4}\Big),$$

wobei $\mathcal{F}$ die hypergeometrische Funktion bezeichnet. Sie ist für $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$, durch die Reihe

$$\mathcal{F}(\alpha,\beta,\gamma,z)=1+\frac{\alpha\,\beta}{\gamma\cdot1}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot1\cdot2}z^2+\dots$$

definiert, wobei die Parameter α,β,γ beliebige komplexe Zahlen mit $\gamma\neq0,\pm1,\pm2,\dots$ sind.

Beweis. Sei $\gamma(\mathcal{E},\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2):(0,\tau_0]\to M^3_\Gamma$ eine geodätische Linie positiver Energie $\mathcal{E}$, die die Kurve Γ mit dem Punkt p_0 verbindet. Dessen Koordinaten seien s_0,ϱ_0,φ_0. Für $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2=0$ ist die geodätische Linie $\gamma(\mathcal{E},\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$ die bereits beschriebene Geodätische (1.21). Wäre $\mathcal{M}_1$ nicht gleich null, so wäre zumindest $\dot\varphi$ fast überall von null verschieden; dann würde Gleichung (1.24) implizieren, daß ein kritischer Wert $\varrho_{\text{krit}}>0$ existiert, für welchen

$$\text{(1.26)}\qquad \mathcal{E}\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}=\frac{r^2+1}{4}\left(\frac{t^4\mathcal{M}_1^2}{\varrho^4(r^2+1)^3}+(\mathcal{M}_1-\epsilon\mathcal{M}_2r)^2+\mathcal{M}_2^2\right)$$

gilt. Für kleinere Werte von ϱ würde die rechte Seite von (1.24) negativ werden, was bedeutet, daß $\varrho(\tau) \geq \varrho_{\mathrm{krit}} > 0$ für alle $\tau \in (0, \tau_0]$ gelten muß. Dies bedeutet, daß für $\mathcal{M}_1 \neq 0$ die Geodätische $\gamma(\mathcal{E}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ niemals die Kurve Γ erreichen kann. Wir nehmen deshalb $\mathcal{M}_1 = 0$ an, wobei $\mathcal{M}_2$ beliebig sei. Nach Gleichung (1.24) gilt dann

$$\dot{\varrho}^2 = \frac{4\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}\mathcal{E} - (r^2+1)^2\mathcal{M}_2^2}{4\varrho^2(r^2+1)^2}.$$

Für den Fall, daß $4t^2\mathcal{E} - (r^2+1)^2\mathcal{M}_2^2 < 0$, wird dieser Ausdruck negativ für kleine ϱ, so daß $\gamma(\mathcal{E}, M_1 = 0, 4t^2\mathcal{E}/(r^2+1)^2 < M_2^2)$ niemals die Menge Γ erreichen kann. Für $4t^2\mathcal{E} - (r^2+1)^2\mathcal{M}_2^2 \geq 0$ bleibt $\dot{\varrho}^2$ jedoch nicht negativ für alle τ, und es gilt

$$\dot{\varphi} = -\epsilon r \frac{r^2+1}{2\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}}\mathcal{M}_2, \qquad \dot{s} = \frac{(r^2+1)^2}{2\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}}\mathcal{M}_2,$$

so daß eine unendliche Schar geodätischer Linien $\gamma(\mathcal{E}, M_1 = 0, 4t^2\mathcal{E}/(r^2+1)^2 \leq M_2^2)$ existiert, welche die Menge Γ in M_Γ^3 in einer spiralförmigen Bewegung erreichen. In diesem Fall impliziert Gleichung (1.24) für $u_1(\tau) = \varrho^2(\tau)(r^2+1)$ die Relation

$$u_{1,\tau} = 2\varrho\dot{\varrho}(r^2+1) = \sqrt{4\mathcal{E}\sqrt{u_1^2 + t^4} - (r^2+1)^2 M_2^2} > 0, \tag{1.27}$$

d.h., sowohl $u_{1,\tau}$ als auch u_1 sind strikt monoton wachsend als Funktionen in τ und der Punkt p_0 wird am ehesten, das ist, für kleinstes τ_0, genau dann erreicht, wenn $\mathcal{M}_2$ ebenfalls null ist. Da die Länge einer Geodätischen durch

$$L_{\gamma(\mathcal{E},\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)} = \int_0^{\tau_0} \left|\dot{\gamma}(\mathcal{E}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)\right| d\tau = \int_0^{\tau_0} \sqrt{h_t(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}d\tau = \sqrt{2\mathcal{E}}\tau_0,$$

gegeben ist, muß der Abstand des Punktes p_0 zu der Menge $\Gamma \subset M_\Gamma^3$ durch die Länge der Geodätischen $\gamma(\mathcal{E}, \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = 0)$ gegeben sein.
Das Integral $\int 1/\sqrt[4]{ax^2 + t^4}dx$ kann nicht mittels elementarer Funktionen dargestellt werden, sondern es gilt

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{ax^2 + t^4}} = \frac{x}{t}\mathcal{F}(1/2, 1/4, 3/2, -ax^2/t^4), \tag{1.28}$$

wobei $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, z)$ die oben eingeführte hypergeometrische Funktion ist. Für $\mathrm{Re}\,(\alpha + \beta - \gamma) < 0$ konvergiert die definierende Reihe sogar in $|z| \leq 1$; die hypergeometrische Funktion hat eine analytische Fortsetzung für $|z| > 1$ und unter der Annahme, daß $\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\beta > 0$ kann sie für alle z als das Integral

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 (-\zeta)^{\beta-1}(1-\zeta)^{\gamma-\beta-1}(1-\zeta z)^{-\alpha}d\zeta$$

dargestellt werden, wobei Γ die Gamma–Funktion bezeichnet und $|\arg(-z)| < \pi$ angenommen werde, damit der Integrand eindeutig definiert ist. Ist z reell, so ergibt Differentiation nach z unter dem Integral die angegebene Gleichheit (1.28), falls man zusätzlich noch von der Relation $\mathcal{F}(m, \beta, \beta, z) = (1-z)^{-m}$, $m \in \mathbb{R}$, β beliebig, Gebrauch macht.

Für $\mathcal{M}_1 = M_2 = 0$ schließen wir endlich mittels (1.27)

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}}}\int\limits_0^{\tau_0}\frac{u_{1,\tau}}{\sqrt[4]{u_1^2+t^4}}d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}}}\int\limits_0^{u_1(\tau_0)}\frac{du_1}{\sqrt[4]{u_1^2+t^4}}\\ &= \frac{1}{2t\sqrt{\mathcal{E}}}u_1(\tau_0)\mathcal{F}(1/2,1/4,3/2,-u_1^2(\tau_0)/t^4),\end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{dist}\,(p_0,\Gamma) = \frac{1}{t\sqrt{2}}\varrho_0^2(r^2+1)\mathcal{F}(1/2,1/4,3/2,-\frac{\varrho_0^4(r^2+1)^2}{t^4}),$$

und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Wir sind nun in der Lage, daß exponentielle Wachstum der Hyperflächen M^3_Γ für den Fall, daß $\Gamma = \partial\, B(0,r)$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ vom Radius $r = r_0$ ist, zu bestimmen. Wir bemerken, daß das Volumen der geodätischen Kugel um einen Punkt $q_0 \in \Gamma \subset M^3_\Gamma$ mit Radius R durch das Volumen der Vereinigung aller R–Kugeln um Punkte von Γ abgeschätzt werden kann, und erhalten hierdurch

$$\mathrm{vol}\,(B_R(q_0)) \le \mathrm{vol}\Big(\bigcup_{q\in\Gamma} B_R(q)\Big) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varrho_R}\int\limits_0^{2\pi r}\sqrt{\det h_t}\,ds\wedge d\varrho\wedge d\varphi$$

$$= 2\pi\sqrt{8}\int\limits_0^{\varrho_R}\int\limits_0^{2\pi r}\frac{\varrho^3(r^2+1)}{\sqrt[4]{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}ds\wedge d\varrho = \frac{4\pi^2 r\sqrt{8}}{3(r^2+1)}\big[(\varrho_R^4(r^2+1)^2+t^4)^{3/4}-t^3\big],$$

da infolge unserer vorangehenden Ausführungen

$$\bigcup_{q\in\Gamma} B_R(q) = \big\{p = \Psi(s,\varrho_R,\varphi)\in M^3_\Gamma : s\in[0,2\pi r),\ \varphi\in[0,2\pi)\big\}\,;$$

dabei ist ϱ_R durch den Ausdruck (1.25) mit $R = \mathrm{dist}\,(p,\Gamma)$ gegeben. Die analytische Fortsetzung von $\mathcal{F}(\alpha,\beta,\gamma,z)$ für $|z|>1$ ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha,\beta,\gamma,z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}\mathcal{F}(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta),1/z)\\ &\quad+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}\mathcal{F}(\beta,\beta+1-\gamma,\beta+1-\alpha,1/z)\end{aligned}$$

gegeben, so daß für hinreichend großes ϱ_0 der Abstand von $p_0 = \Psi(s_0,\varrho_0,\varphi_0)$ zu der Menge Γ durch

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}\,(p_0,\Gamma) &= \frac{1}{t\sqrt{2}}\varrho_0^2(r^2+1)\left[\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(-1/4)}{\Gamma(1/4)\Gamma(1)}\frac{t^2}{\varrho_0^2(r^2+1)}\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},0,\frac{5}{4},\frac{-t^4}{\varrho_0^4(r^2+1)^2}\right)\right.\\ &\left.+\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(1/2)\Gamma(5/4)}\frac{t}{\varrho_0\sqrt{r^2+1}}\mathcal{F}\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{-t^4}{\varrho_0^4(r^2+1)^2}\right)\right]\\ &= \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(-1/4)}{\Gamma(1/4)\Gamma(1)}\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(1/2)\Gamma(5/4)}\sqrt{\frac{r^2+1}{2}}\varrho_0\left(1+\frac{1}{12}\frac{t^4}{\varrho_0^4(r^2+1)^2}+\dots\right)\end{aligned}$$

gegeben ist, was bedeutet, daß dist (p_0, Γ) proportional zu $\varrho_0\sqrt{r^2+1}$ für $1 \ll \varrho_0$ ist. Wir erhalten für $q_0 \in \Gamma$, daß

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{vol}\,(B_R(q_0)) \\
&\le \lim_{\varrho\to\infty} \left[\log \frac{4\sqrt{8}\pi^2 r}{3(r^2+1)} + \log\left((\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^{3/4} - t^3\right)\right] \cdot \left[\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(-1/4)}{\Gamma(1/4)\Gamma(1)} \frac{t}{\sqrt{2}}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(1/2)\Gamma(5/4)} \sqrt{\frac{r^2+1}{2}}\,\varrho \left(1 + \frac{1}{12} \frac{t^4}{\varrho^4(r^2+1)^2} + \dots\right)\right]^{-1} \\
&= \lim_{\varrho\to\infty} \frac{3\varrho^3(r^2+1)^2}{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4 - t^3\sqrt[4]{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}} \left[\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(1/2)\Gamma(5/4)} \sqrt{\frac{r^2+1}{2}}\right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \frac{t^4}{\varrho^4(r^2+1)^2} + \dots\right)\right]^{-1} = 0,
\end{aligned}$$

und der entsprechende Limes Superior ist demnach ebenfalls null. Infolge von Isometriebetrachtungen gelangen wir somit zu folgendem Ergebnis.

Proposition 1.12. *Ist $\Gamma = \partial B(0, r)$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung vom Radius $r = r_0$, so gilt $\mu_\infty(M^3_{A\Gamma}) = 0$ für alle $A \in \mathrm{U}(2)$.* □

Wir möchten diesen Abschnitt mit einigen Bemerkungen über geschlossene Geodäten in M^3_Γ beenden, wobei wir abermals annehmen, daß Γ ein Kreis in $\mathbb{C}$ vom Radius $r = r_0$ um den Ursprung ist. In diesem Fall ist M^3_Γ in die zweidimensionalen Tori $T^2_{\varrho_0,r_0}$, $\varrho_0 > 0$ konstant, geblättert. Sei $\gamma(\tau) = \Psi(s(\tau), \varrho_0, \varphi(\tau)) : [0, L_\gamma] \to T^2_{\varrho_0,r_0} \subset M^3_\Gamma$ eine auf Bogenlänge parametrisierte geodätische Linie. Da $\dot\varrho = 0$, sind $\ddot s$ und $\ddot\varphi$ ebenfalls null. Die Relation (1.23) liest sich dann $\mathcal{M}_2\dot s = 2\mathcal{E} - \mathcal{M}_1\dot\varphi$ und Gleichung (1.26) muß gelten, was eine Bedingung an $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\varrho_0, r_0)$ für gegebene Werte von $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ darstellt. Vermöge der $S^1 \times S^1$–Symmetrie von $T^2_{\varrho_0,r_0}$ ist nun

$$\Psi(s_0, \varrho_0, \varphi_0) = \Psi(s_0 + 2\pi r_0 \cdot n, \varrho_0, \varphi_0 + 2\pi \cdot m), \qquad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Indem wir $s(\tau) = s_0 + \dot s\tau$, $\varphi(\tau) = \varphi_0 + \dot\varphi\tau$ schreiben, sehen wir, daß $\gamma(\tau)$ eine geschlossene Geodätische genau dann ist, falls $\dot s L_\gamma = 2\pi r_0 \cdot n$ und $\dot\varphi L_\gamma = 2\pi \cdot m$ erfüllt sind, also falls

$$\frac{\dot s}{\dot\varphi} = r_0 \cdot \frac{n}{m} \in r_0 \cdot \mathbb{Q}^*, \qquad \text{für} \quad n, m \neq 0;$$

sind n oder m gleich null, so ist $\gamma(\tau)$ selbstverständlich ebenfalls eine geschlossene Geodätische. Einsetzen der oben berechneten Ausdrücke für $\dot s$ und $\dot\varphi$ ergibt für obige Bedingung

$$\frac{-\epsilon r_0\mathcal{M}_1 + (r_0^2+1)\mathcal{M}_2}{4(\mathcal{M}_1 - \epsilon r_0\mathcal{M}_2) + GH\varrho_0^2\mathcal{M}_1} \in r_0 \cdot \mathbb{Q}^*;$$

man beachte, daß $GH = 4t^4/\varrho^6(r^2+1)^3$. Als Lösungen für $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ erhalten wir insgesamt

$$\mathcal{M}_1 = \frac{m(r_0^2+1)/4 + \epsilon n r_0^2}{\varrho_0^4(r_0^2+1)^2 + t^4}\varrho_0^4(r_0^2+1)^2, \qquad \mathcal{M}_2 = \frac{r_0}{r_0^2+1}(n + \epsilon\mathcal{M}_1),$$

wobei n, m ganze Zahlen sind. Die Kurve $\gamma(\mathcal{E}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ ist dann eine geschlossene Geodäte in $T^2_{\varrho_0,r_0}$ und $\mathcal{E}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ hängen von ϱ_0, r_0, n, m wie oben beschrieben ab. Insbesondere existieren mindestens abzählbar viele geschlossene Geodäten in $T^2_{\varrho_0,r_0} \subset M^3_\Gamma$.

Teil 2

Das Spektrum des Dirac– und des Laplace–Operators

Der zweite Teil dieser Arbeit hat die Spektralgeometrie der untersuchten Hyperflächen zum Gegenstand. Im Gegesatz zum Fall kompakter Riemannscher Mannigfaltigkeiten können für offene Riemannsche Mannigfaltigkeiten a priori nur wenige präzise Aussagen über das Spektrum von Operatoren vom Laplace–Weitzenböck–Typ wie etwa der Laplace–Operator Δ oder der Dirac–Operator D gemacht werden und eine detailliertere Kenntnis der geometrischen Eigenschaften der untersuchten Räume ist erforderlich. Ausgehend von den im vorangehenden Teil angestellten Betrachtungen zeigen wir durch Auffinden einer geeigneten kanonischen ausschöpfenden Funktion, die aus einer Modifikation der Abstandsfunktion hervorgeht, daß auf den betrachteten Hyperflächen M^3_Γ für $p \geq 1$ und beliebige Kurven Γ keine L^p–harmonischen Funktionen vorliegen können, und untersuchen desweiteren die Existenz von Lösungen spinorieller Feldgleichungen. Im Fall von Kurven, welche durch Möbius–Transformationen aus geschlossenen Kurven hervorgehen, sind die die betrachteten Hyperflächen vollständig und wir zeigen unter Verwendung des min–max–Prinzips und der im ersten Teil berechneten geometrischen Größen, daß die Infima der Spektren von $\overline{\Delta}$ und $\overline{\mathrm{D}}^2$ auf M^3_Γ beliebig nahe an null heranreichen. Letztere Aussage bezüglich des Laplace–Operators impliziert dann zusammen mit der Nicht-Existenz L^2–harmonischer Funktionen, daß die betrachteten Hyperflächen in diesem Fall von subexponentiellem Wachstum sind. Unter der Voraussetzung, daß Γ ein verallgemeinerter Kreis in $\mathbb{C}$ ist, welcher durch eine Möbius–Transformation aus einem Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung hervorgeht, berechnen wir weiterhin den L^2–Kern des Dirac–Operators im Sinne der Spektraltheorie und zeigen, daß dieser trivial ist; Null liegt somit in diesem Fall im wesentlichen Spektrum von $\overline{\mathrm{D}}$.

1. Integrale subharmonischer Funktionen auf den Hyperflächen M^3_Γ

Wir zeigen im folgenden, daß der L^p–Kern des Laplace–Operators auf den Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) für beliebige $t \geq 0$ und $p \geq 1$ sowie Kurven Γ trivial ist. Wir werden bei unseren Betrachtungen von den um vieles allgemeineren Arbeiten von Greene und Wu ausgehen [**10**], die Integrale gewisser verallgemeinerter subharmonischer Funktionen auf zusammenhängenden, nicht–kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die eine kanonische ausschöpfende Funktion zulassen, untersuchten und zeigten, daß diese Integrale nicht beschränkt bleiben können. Insbesondere bewiesen sie folgenden Satz.

Satz 2.1 (Greene und Wu)**.** *Sei M eine zusammenhängende, nicht kompakte, orientierte Riemannsche C^∞–Mannigfaltigkeit. Angenommen, es existieren eine stetige und eigentliche Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $K_\varphi \subset M$ derart, daß*
a) $\varphi|_{M\setminus K_\varphi}$ *eine C^2–Funktion ist,*
b) $\varphi|_{M\setminus K_\varphi}$ *gleichmäßig Lipschitz–stetig ist,*
c) $\varphi|_{M\setminus K_\varphi}$ *subharmonisch ist.*

Bezeichne weiter $\Sigma(M)$ den Abschluß der Menge aller subharmonischen C^∞–Funktionen in $\mathrm{C}^0(M)$. Ist f eine nicht negative Funktion in $\Sigma(M)$ welche so beschaffen ist, daß

$$\{p \in M : f(p) > 0,\ \varphi(p) > \max_{K_\varphi} \varphi,\ \operatorname{grad}\varphi(p) \neq 0\} \neq \emptyset,$$

so existieren Konstanten $A_f > 0$ und τ_0, so daß

$$\int_{M_\tau^\varphi} f dM \geq A_f(\tau - \tau_0)$$

für alle $\tau \geq \tau_0$, wobei M_τ^φ die Menge aller $p \in M$ für welche $\varphi(p) \leq \tau$ gilt, bezeichnet; insbesondere folgt $\int_M f dM = +\infty$.

Eine Beschreibung der Menge $\Sigma(M)$ ist durch folgende Proposition gegeben.

Proposition 2.1 (Greene und Wu)**.** *Es sei eine nicht kompakte Riemannsche C^∞–Mannigfaltigkeit M gegeben. Dann sind die folgenden Funktionen in $\Sigma(M)$:*
1) *Jede Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, die auf kompakten Teilmengen von M der gleichmäßige Limes einer Folge von Funktionen in $\Sigma(M)$ ist,*
2) *subharmonische C^2–Funktionen,*
3) *u^p, wobei u eine nicht negative subharmonische C^2–Funktion ist und $p \geq 1$,*
4) *$|u|^p$ wobei u eine harmonische Funktion ist und $p \geq 1$,*
5) *jede geodätisch konvexe Funktion.*

Allgemein ist der Laplace–Operator auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g), auf C^∞–Funktionen wirkend, durch $\Delta f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ definiert, wobei für ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M^n)$ bezüglich eines lokales Orthonormalrepers $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ dessen Divergenz durch

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{Y_i} X, Y_i) = \sum_{i=1}^n Y_i(X^i) + \sum_{i,j=1}^n X^j \omega_{ji}(Y_i)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnen X^i die Komponenten von X und ω_{ij} die Zusammenhangsformen des Levi–Civita–Zusammenhangs ∇ von M^n. Im folgenden werden wir obige Ergebnisse auf die hier untersuchten Hyperflächen M^3_Γ für jede beliebige Kurve Γ übertragen und so insbesondere das Verschwinden des L^p–Kerns des Laplace–Operators sogar in dem Fall, daß M^3_Γ nicht vollständig ist, beweisen. Wir betrachten zunächst die Funktion

$$\varphi^* := \varrho\sqrt{r^2 + 1},$$

welche C^∞ auf $M^3_\Gamma \cap M^4$ ist. Man berechnet dann in der Basis (1.3)

$$Y_1(\varphi^*) = \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\sqrt{r^2+1}, \qquad Y_1 Y_1(\varphi^*) = -\frac{1}{2h_{22}}(\log K)_{,\varrho}\sqrt{r^2+1},$$

und somit

$$\begin{aligned}\Delta\varphi^* &= -Y_1Y_1(\varphi^*) - Y_1(\varphi^*)\sum_{i=1}^3 \omega_{1i}(Y_i) = \frac{1}{h_{22}}\Big(\frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho} - \frac{2}{\varrho}\Big)\sqrt{r^2+1} = \\ &= \frac{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}}{2\varrho^3(r^2+1)^{3/2}}\Big(\frac{t^4}{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4} - 2\Big).\end{aligned}$$

Wegen $\sup_\varrho t^4(\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4)^{-1} = 1$ folgt, daß φ^* subharmonisch ist und man berechnet ferner

$$|\operatorname{grad}\varphi^*|^2 = Y_1^2(\varphi^*) = K^{-1} = \frac{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}{2\varrho^2(r^2+1)}. \tag{2.1}$$

Wir definieren nun die C^∞–Funktion $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1)$ durch $\lambda(x) = e^{-1/x^2}$ für $x > 0$ und $\lambda(x) = 0$ für $x \leq 0$ und setzen

$$\mu(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \lambda(y)\lambda(1-y)dy \Big/ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(y)\lambda(1-y)dy. \tag{2.2}$$

Die Funktion $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ ist ebenfalls C^∞, monoton und gleich null für $x \leq 0$ bzw. gleich eins für $x \geq 1$. Sei $0 < s_0 < L_\Gamma$ eine beliebige reelle Zahl. Dann ist

$$\varphi := \varrho\sqrt{r^2+1} \cdot \mu(\varrho)$$

eine C^∞–Funktion auf M^3_Γ und subharmonisch auf $M^3_\Gamma \setminus K_\varphi$, wobei

$$K_\varphi := \left\{ p = p(s,\varrho,\varphi) \in M^3_\Gamma : s \leq s_0,\ \varrho \leq 1 \right\}.$$

Man beachte dabei, daß K_φ kompakt und φ eigentlich ist, d.h.

$$\varphi^{-1}[0,\kappa] = \left\{ p \in M^3_\Gamma :\ \varrho\sqrt{r^2+1} \cdot \mu(\varrho) \leq \kappa \right\}$$

ist kompakt für alle $\kappa \in \mathbb{R}^+$. Wir zeigen, daß φ global Lipschitz ist. Hierzu bemerken wir zunächst, daß $|\operatorname{grad}\varphi| \leq B_\varphi$ auf M^3_Γ gilt, wobei B_φ eine Konstante ist, da $|\operatorname{grad}\varphi|^2$ auf $M^3_\Gamma \setminus K_\varphi$ asymptotisch gegen $1/2$ geht und, als eine glatte Funktion, beschränkt auf K_φ bleibt. Seine nun p und q zwei Punkte in M^3_Γ, und $\gamma(\tau)$ die kürzeste Geodäte zwischen ihnen, so daß $\operatorname{dist}(p,q) = L_\gamma$; wir nehmen an, daß γ auf Bogenlänge parametrisiert ist. Da

$$h_t(\operatorname{grad}\varphi(\gamma(\tau_0)), \dot\gamma(\tau_0)) = d\varphi(\gamma(\tau_0))(\dot\gamma(\tau_0)) = \frac{d}{d\tau}\varphi(\gamma(\tau))|_{\tau=\tau_0},$$

folgt mittels Cauchy–Schwarz, daß

$$\begin{aligned} |\varphi(p) - \varphi(q)| &= \Big| \int_0^{L_\gamma} \frac{d}{d\tau}\varphi(\gamma(\tau))d\tau \Big| = \Big| \int_0^{L_\gamma} h_t(\operatorname{grad}\varphi(\gamma(\tau)), \dot\gamma(\tau))d\tau \Big| \\ &\leq \int_0^{L_\gamma} |\operatorname{grad}\varphi(\gamma(\tau))| \cdot |\dot\gamma(\tau)| d\tau \leq B_\varphi \operatorname{dist}(p,q), \end{aligned}$$

d.h., φ ist gleichmäßig Lipschitz–stetig auf M^3_Γ. Insgesamt erhalten wir folgende Proposition.

Proposition 2.2. *Auf den zusammenhängenden, nicht kompakten, orientierten Riemannschen C^∞–Mannigfaltigkeiten (M^3_Γ, h_t) existieren für jedes $t \neq 0$ und jede Kurve Γ eine eigentliche stetige Funktion $\varphi : M^3_\Gamma \to \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $K_\varphi \subset M^3_\Gamma$ derart, daß*
a) *φ eine C^∞–Funktion ist,*
b) *φ gleichmäßig Lipschitz ist,*
c) *$\varphi|_{M^3_\Gamma \setminus K_\varphi}$ subharmonisch ist.*
Insbesondere gelten die Folgerungen von Theorem 2.1. □

Man beachte, daß obige Proposition auch in dem Fall, daß $t = 0$ ist, also für die nicht vollständigen Riemannschen C^∞–Mannigfaltigkeiten $(M^3_\Gamma \cap M^4, h_0)$ richtig bleibt. Als Konsequenz erhalten wir folgenden Verschwindungssatz.

Korollar 2.1. *Es existieren keine L^p–harmonischen Funktionen, $p \geq 1$, auf den Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) für beliebige $t \in \mathbb{R}$ und Kurven Γ.*

Beweis. Seien φ und K_φ wie in der vorangehenden Proposition gegeben und sei u eine harmonische Funktion auf M^3_Γ. Nach Proposition 2.1 gilt $|u|^p \in \Sigma(M^3_\Gamma)$ für alle $p \geq 1$. Nach dem Aronszajn–Cordes–Eindeutigkeitssatz für Differentialoperatoren $\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x)\,\partial^\alpha$ zweiter Ordnung mit elliptischem, metrischem Hauptsymbol [**1**] kann u nur dann identisch auf $M^3_\Gamma \setminus K_\varphi$ verschwinden, wenn es überall verschwindet. Demzufolge ist für ein nicht triviales u die Menge

$$\left\{ m \in M^3_\Gamma : |u|^p(m) > 0,\, \varphi(m) > \max_{K_\varphi} \varphi,\, \operatorname{grad} \varphi(m) \neq 0 \right\}$$

nicht leer, und nach Theorem 2.1 existieren Konstanten A und τ_0 derart, daß

$$\int_{M^\varphi_\tau} |u|^p dM^3_\Gamma \geq A(\tau - \tau_0)$$

für alle $\tau \geq \tau_0$. Insbesondere ist $\mathrm{Ker}_{\mathrm{L}^p}(\Delta) = \{0\}$ für alle $p \geq 1$. □

2. Einstein– und T–Killing–Spinoren auf den Hyperflächen M^3_Γ

In folgenden werden wir den Dirac–Operator D auf den Hyperflächen M^3_Γ, deren Geometrie in den vorangehenden Abschnitten studiert worden war, untersuchen. Für $t > 0$ ist der Homotopietyp von M^3_Γ durch $\mathbb{R}^2 \times \Gamma / \{\pm 1\}$ gegeben. Ist die Kurve Γ nicht geschlossen, so kann M^3_Γ nicht vollständig sein und hat demzufolge nur eine Spin–Struktur. Anderenfalls hat M^3_Γ denselben Homotopietyp wie der Kreis S^1 und läßt dementsprechend zwei Spin–Strukturen zu. Die triviale Spin–Struktur ist dadurch charakterisiert, daß eine globale Trivialisierung des Spin(3)–Hauptfaserbündels, welches ein beliebiges Orthonormalreper–Bündel überlagert, existiert, während die nicht triviale Spin–Struktur eine solche Trivialisierung nur lokal zuläßt. Andererseits induziert die Spin–Struktur des Eguchi–Hanson–Raumes H^2 eine Spin–Struktur auf den Hyperflächen $M^3_\Gamma \subset H^2$ durch Reduktion der ersteren bezüglich des äußeren Normalenvektorfeld von M^3_Γ. Es stellt sich heraus, daß die induzierte Spin–Struktur genau dann die triviale ist, wenn die Windungszahl der geschlossenen Kurve Γ gerade ist. In den folgenden Betrachtungen werden die meisten Aussagen bezüglich der trivialen bzw. induzierten Spin–Struktur hergeleitet werden, obwohl manche von ihnen, die aus rein geometrischen Überlegungen folgen, für beide Spin–Strukturen gelten.

Zu Beginn werden wir versuchen, Lösungen der Dirac–Gleichung zu bestimmen, welche gleichzeitig Lösungen der Einstein–Gleichungen sind, und zeigen, daß die betrachteten Hyperflächen für den Fall, daß $t \neq 0$ ist, keine solche Lösungen zulassen. Es ist jedoch möglich, solche Lösungen explizit mittels Deformation in eine singuläre Situation hinein zu konstruieren, obwohl diese Lösungen dann nicht länger vollständig sind. Für den Fall, daß die zugrundeliegenden Hyperflächen vollständig sind und M^3_Γ eine Minimal–Fläche ist, kann weiterhin die Existenz eines Spinorfeldes, welches einer verallgemeinerten Killing–Gleichung für Spinoren genügt, gezeigt werden.

Wir bezeichnen mit $e_1, \ldots, e_n$ die Standard–Basis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ und führen die komplexen, zweidimensionalen Matrizen

$$g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ein. Für den Fall, daß $n = 2m$, ist die Spin–Darstellung der komplexen n–dimensionalen Clifford–Algebra C^c_n durch den Isomorphismus

$$\kappa_{2m} : C^c_{2m} \simeq End(\Delta_{2m}), \quad \kappa_{2m}(e_j) := E \otimes \cdots \otimes E \otimes g_{\alpha(j)} \otimes \underbrace{T \otimes \cdots \otimes T}_{[(j-1)/2]\text{–mal}}$$

gegeben, wobei $j = 1, \dots, 2m$ und $\alpha(j)$ gleich 1 bzw. 2 für ungerades bzw. gerades j ist. Für $n = 2m+1$ erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned} \kappa_{2m+1} : C^c_{2m+1} \simeq End(\Delta_{2m+1}) \oplus End(\hat{\Delta}_{2m+1}) \xrightarrow{pr_1} End(\Delta_{2m+1}), \\ \kappa_{2m+1}(e_j) := \kappa_{2m}(e_j), \qquad \kappa_{2m+1}(e_{2m+1}) := -iT \otimes \cdots \otimes T, \end{aligned}$$

wobei $\Delta_{2m} = \Delta_{2m+1} = \hat{\Delta}_{2m+1} = \mathbb{C}^{2^m}$ sowohl für die entsprechenden Darstellungsräume als auch die Darstellungen selbst stehen. Die induzierten Darstellungen von $\mathrm{Spin}(n) \subset C^c_n$ werden mit denselben Symbolen bezeichnet.
Sei $\Sigma(M^2_\Gamma)$ oder einfach Σ das jeweils betrachtete Spinorbündel von M^3_Γ, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dessen hermitesches inneres Produkt und $\Gamma(\Sigma)$ der Raum aller glatten Schnitte. Wir identifizieren das Tangentialbündel TM^3_Γ und das Kotangentialbündel $T^*M^3_\Gamma$ mit Hilfe von h_t. Demzufolge kann die Clifford–Multiplikation $TM^3_\Gamma \otimes_{\mathbb{R}} \Sigma(M^3_\Gamma) \to \Sigma(M^3_\Gamma)$ eines Spinors mit einem Vektor auf natürliche Weise zu einer Multiplikation $\Lambda(M^3_\Gamma) \otimes_{\mathbb{R}} \Sigma(M^3_\Gamma) \to \Sigma(M^3_\Gamma)$ eines Spinors mit einer Form erweitert werden. Der Levi–Civita–Zusammenhang ∇ von (M^3_Γ, g_t) induziert in $\Sigma(M^2_\Gamma)$ eine kovariante Ableitung, die wir ebenfalls mit ∇ bezeichnen werden. Bezüglich eines lokalen Orthonormalrepers $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ erhält man für ∇ die Darstellung

$$\nabla : \Gamma(\Sigma) \longrightarrow \Gamma(T^*(M^3_\Gamma) \otimes \Sigma), \qquad \nabla\psi = d\psi + \frac{1}{2} \sum_{i<j}^{3} \omega_{ij} Y_i \cdot Y_j \cdot \psi,$$

wobei die ω_{ij} die Zusammenhangsformen des Levi–Civita–Zusammenhangs bezeichnen und $X \cdot \psi$ die Clifford–Multiplikation eines Vektorfeldes mit einem Spinor darstellt. Der Dirac–Operator $\mathrm{D} : \Gamma(\Sigma) \to \Gamma(\Sigma)$ auf M^3_Γ laßt sich dann lokal gemäß

$$\mathrm{D}\,\psi = \sum_{i=1}^{3} Y_i \cdot \nabla_{Y_i} \psi$$

schreiben. In der oben gegebenen Realisierung der komplexen Clifford–Algebra $C^c_3 \simeq M(2,\mathbb{C}) \oplus M(2,\mathbb{C})$ werden die Vektoren Y_1, Y_2, bzw. Y_3 mittels der Matrizen g_1, g_2 bzw. $-iT$ dargestellt. Man beachte dabei, daß in der dreidimensionalen Clifford–Algebra $e_i = \epsilon_{ijk}\, e_j e_k$ gilt, wobei ϵ_{ijk} den total schiefsymmetrischen Tensor bezeichnet. Bezüglich des globalen Schnittes (1.3) wurden die 1–Formen ω_{ij} bereits in Proposition 1.2 berechnet. Wir führen nun folgende Definitionen ein.

Definition 2.1. Ein nicht triviales Spinor–Feld ψ auf einer Riemannschen Spin–Mannigfaltigkeit (M^n, g) der Dimension $n \geq 3$ heißt *positiver* bzw. *negativer Einstein–Spinor* mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls er eine Lösung der Dirac– und der Einstein–Gleichung

$$\mathrm{D}\,\psi = \lambda\psi, \qquad \mathrm{Ric} - \frac{1}{2} S\, g = \pm\frac{1}{4} T_\psi$$

ist, wobei $T_\psi(X,Y) = \mathrm{Re}\ \langle X \cdot \nabla_Y \psi + Y \cdot \nabla_X \psi, \psi \rangle$ das durch ψ definierte symmetrische $(0,2)$–Tensor–Feld, der Energie–Impuls–Tensor von ψ, ist.

Wie in [**8**] von Friedrich und Kim gezeigt, ist in Dimension $n = 3$ und im Fall, daß die Skalarkrümmung nicht verschwindet, die Existenz eines Einstein–Spinors äquivalent zur Existenz eines sogenannten WK–Spinors:

Definition 2.2. Sei (M^n, g) eine Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit, dessen Skalarkrümmung S nirgends verschwindet. Ein nicht triviales Spinorfeld auf M heißt *schwacher*

Killing–Spinor oder *WK–Spinor* mit *WK–Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}$, falls es der Feldgleichung

$$2(n-1)S\,\nabla_X\psi = n\,dS(X)\psi + 2\lambda\frac{n-1}{n-2}\big(2\,\mathrm{Ric}(X) - S\,X\big)\cdot\psi + X\cdot dS\cdot\psi \tag{2.3}$$

genügt.

Für allgemeines n entspricht jede Lösung ψ der Feldgleichung (2.3) mit $\lambda S < 0$ bzw. $\lambda S > 0$ einem positiven bzw. negativen Einstein–Spinor mit Eigenwert λ. Für die Existenz eines WK–Spinors ist folgende notwendige Bedingung bekannnt [**8**]:

Proposition 2.3 (Friedrich and Kim)**.** *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit mit nicht verschwindender Skalarkrümmung und ψ ein WK–Spinor auf (M^n, g) mit WK–Zahl λ. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &4(n-1)\lambda^2[(n^2-5n+8)S^2 - 4\,|\mathrm{Ric}|^2] \\ &\qquad = (n-2)^2[(n-1)S^3 + n\,|dS|^2 + 2(n-1)S(\Delta S)]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Im folgenden zeigen wir, daß für $t \neq 0$ die Bedingung (2.4) auf M^3_Γ für keine Kurve Γ jemals erfüllt sein kann.

Proposition 2.4. *Für $t \neq 0$ lassen die Hyperflächen (M^3_Γ, h_t) bezüglich jeder der beiden Spin–Strukturen keine Lösungen der WK–Gleichung zu; demzufolge existieren auf besagten Hyperflächen keine Lösungen des Dirac–Einstein–Systems.*

Beweis. Angenommen es existiert auf (M^3_Γ, h_t) ein WK–Spinor mit WK-Zahl λ. Nach Proposition 2.3 muß dann

$$8\lambda^2(2S^2 - 4\,|\mathrm{Ric}|^2) = 2S^3 + 3\,|dS|^2 + 4S(\Delta S) \tag{2.5}$$

erfüllt sein, wobei S in Satz 1.1 berechnet wurde. Mittels des Orthonormalrepers (1.3) und der Relation $(r^2+1)S_{,s} = r\dot{r}\varrho S_{,\varrho}$ berechnet man

$$\begin{aligned} Y_1(S) &= \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\frac{\partial}{\partial\varrho}S = -\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\frac{\varrho^3(r^2+1)^2}{(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^{5/2}}(4t^4 - 2\varrho^4(r^2+1)^2), \\ Y_2(S) &= \frac{1}{\sqrt{h_{33}}}\frac{\partial}{\partial\varphi}S = 0, \\ Y_3(S) &= D\frac{\partial}{\partial s}S + E\frac{\partial}{\partial\varrho}S + F\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0 \end{aligned}$$

und erhält so für den Laplace–Operator angewandt auf S den Ausdruck

$$\begin{aligned} -\Delta S = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,S &= Y_1Y_1(S) + Y_1(S)\sum_{i=1}^{3}\omega_{1i}(Y_i) \\ &= Y_1Y_1(S) + Y_1(S)\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{1}{2}(\log h_{33})_{,\varrho} - (\log D)_{,\varrho}\right) = Y_1Y_1(S) + Y_1(S)\frac{2}{\sqrt{h_{33}}}, \end{aligned}$$

siehe Proposition 1.2. Man berechnet ferner

$$\begin{aligned} Y_1Y_1(S) &= \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}S_{,\varrho}\right)_{,\varrho} = \frac{1}{h_{22}}S_{,\varrho^2} - \frac{1}{2(h_{22})^2}h_{22,\varrho}S_{,\varrho} \\ &= -\frac{2(4t^8 - 20(1+r^2)^2t^4\varrho^4 + 3(1+r^2)^4\varrho^8)}{(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^3} \end{aligned}$$

sowie

$$Y_1(S)\frac{2}{\sqrt{h_{33}}} = -2\frac{2t^4 - \varrho^4(r^2+1)^2}{(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^2}$$

und erhält für ΔS den Ausdruck

$$\Delta S = \frac{8t^8 - 18\varrho^4 t^4(r^2+1)^2 + \varrho^8(r^2+1)^4}{(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^3}.$$

Da weiter $|dS|^2 = Y_1(S)^2$, $|\mathrm{Ric}|^2 = \operatorname{tr}\mathrm{Ric}^2 = R_{11}^2 + R_{22}^2 + R_{33}^2$, erhält man

$$8\lambda^2 \frac{1}{(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^3}(-24t^8 - 4\varrho^4 t^4(r^2+1)^2)$$

für die linke Seite von (2.5) und

$$\frac{-2}{(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^3} S[-8t^8 + 48\varrho^4(r^2+1)^2 t^4],$$

für die rechte Seite, so daß die Bedingung (2.5) nun

$$\lambda^2(-12t^8 - 2\varrho^4(r^2+1)^2 t^4) = S(t^8 - 6\varrho^4(r^2+1)^2 t^4)$$

lautet und man erkennt dann, daß sie für $t \neq 0$ für keine Kurve Γ jemals erfüllt sein kann. Da die Integrabilitätsbedingung (2.5) rein geometrischer Natur ist, gilt die Behauptung für beide Spin–Strukturen. □

Allein für $t = 0$ ist die Bedingung (2.5) für beliebige Werte von λ erfüllt, da dann beide Seiten identisch verschwinden. In diesem Fall sind die Hyperflächen (M^3_Γ, h_0) nicht länger vollständig, die Metrik degeneriert längs der exzeptionellen Kurve; in diesem Fall ist $K = G = 2$, $H = 0$ und der Ricci–Tensor und die Skalarkrümmung lauten

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric} &= \frac{1}{2\varrho^6(r^2+1)^3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho^4(r^2+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho^4(r^2+1)^2 \end{pmatrix}, \\ S &= -\frac{1}{\varrho^2(r^2+1)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Im folgenden zeigen wir, daß in diesem Fall Lösungen des Dirac–Einstein–Systems auf $(M^3_\Gamma \cap M^4, h_0)$ für eine beliebige Wahl der Kurve Γ explizit konstruiert werden können. Wir betrachten hierzu ein nicht triviales Spinorfeld ψ auf M^3_Γ, welches der Spinorgleichung (2.3) für $n = 3$,

$$\nabla_X\psi = \frac{3}{4S}dS(X)\psi + \frac{2\lambda}{S}\,\mathrm{Ric}(X)\cdot\psi - \lambda X\cdot\psi + \frac{1}{4S}X\cdot dS\cdot\psi,$$

genügt. Indem wir $\psi = \sqrt{-S}\,\chi$ setzen, kann obige Gleichung in eine Gleichung für χ umgeformt werden. Unter Benutzung von $\nabla(f\psi) = d\,f\otimes\psi + f\nabla\psi$ für eine Funktion f und der Relation $X\cdot dS = -dS(X) + X\times dS$ in der dreidimensionalen Clifford–Algebra ergibt sich

$$\nabla_X\,\chi = \lambda\left(\frac{2}{S}\,\mathrm{Ric}(X) - X\right)\cdot\chi + \frac{1}{4S}(X\times dS)\cdot\chi. \tag{2.7}$$

Wie bereits gezeigt, ist bezüglich der Basis (1.3) lediglich $Y_1(S)$ verschieden von null und man erhält

$$X\times dS = \omega^3(X)Y_1(S)Y_2 - \omega^2(X)Y_1(S)Y_3.$$

Weiterhin gilt

$$\frac{2}{S}\,\mathrm{Ric}(X) - X = \frac{2R_{11}-S}{S}\omega^1(X)Y_1 + \frac{2R_{22}-S}{S}\omega^2(X)Y_2 + \frac{2R_{33}-S}{S}\omega^3(X)Y_3.$$

In der oben gegebenen Realisierung der komplexen Clifford–Algebra erhält man mittels Proposition 1.2

$$\begin{aligned}\nabla\chi &= d\chi + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\omega_{ij}Y_i\cdot Y_j\cdot\chi = d\chi + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\omega_{23} & -\omega_{12}-i\omega_{13} \\ \omega_{12}-i\omega_{13} & -i\omega_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}\\ &= d\chi + \frac{1}{2\sqrt{h_{22}}}\left[\frac{(\log h_{33})_{,\varrho}}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ \omega^2 & 0\end{pmatrix} + (\log D)_{,\varrho}\begin{pmatrix} 0 & i\omega^3 \\ i\omega^3 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ist nun $t=0$, so gilt

$$\frac{2R_{11}-S}{S} = -1, \qquad \frac{2R_{22}-S}{S} = 0, \qquad \frac{2R_{33}-S}{S} = 0$$

sowie

$$(\log D)_{,\varrho} = -\frac{1}{\varrho}, \qquad (\log h_{33})_{,\varrho} = \frac{2}{\varrho}, \qquad (\log S)_{,\varrho} = -\frac{2}{\varrho}.$$

Faßt man all dies zusammen, so lautet (2.7)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} d\chi_1\\ d\chi_2\end{pmatrix} &= \left\{\lambda\begin{pmatrix} -i\omega^1 & 0 \\ 0 & i\omega^1\end{pmatrix} - \frac{1}{2\varrho\sqrt{h_{22}}}\begin{pmatrix} 0 & i\omega^3+\omega^2 \\ i\omega^3-\omega^2 & 0\end{pmatrix}\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{2\varrho\sqrt{h_{22}}}\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2-i\omega^3 \\ \omega^2-i\omega^3 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}\\ &= \lambda\begin{pmatrix} -i\omega^1 & 0 \\ 0 & i\omega^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei die Summanden $(X\times dS)/4S$ und $\sum_{i<j}\omega_{ij}(X)\,e_i\cdot e_j/2$ sich gegenseitig aufheben. Da $d\omega_1 = 0$, kann obiges System integriert werden. Berücksichtigt man, daß $d\chi_j = \sum_{i=1}^3 Y_i(\chi_j)\omega^i = \chi_{j,s}\,ds + \chi_{j,\varrho}\,d\varrho + \chi_{j,\varphi}\,d\varphi$, und zieht die Ausdrücke für die ω^i hinzu, so erhält man das System von partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & \overline{f_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial\varrho}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & \overline{f_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix},$$

wobei

$$f_0 = -i\lambda\frac{r\dot r\varrho}{r^2+1}\sqrt{(r^2+1)K}, \qquad f_2 = -i\lambda\sqrt{(r^2+1)K}$$

Funktionen in den Variablen ϱ und s sind. Man beachte, daß $(r^2+1)f_0 = r\dot r\varrho f_2$. Weiter gilt

$$\varrho\frac{\partial}{\partial s}f_2 = \varrho\left(-\lambda i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{r^2+1}}2r\dot r\right) = f_0,$$

woraus hervorgeht, daß

$$\chi_1 = e^{f_2(s)\varrho}, \qquad \chi_2 = e^{-f_2(s)\varrho}$$

eine Lösung des obigen Systems ist. Geht man wieder zur ursprünglichen WK–Gleichung über, so ergibt sich folgende Proposition.

Proposition 2.5. *Gegeben sei die Familie von Hyperflächen* $(M^3_\Gamma \cap M^4, h_0)$*, wobei* Γ *eine beliebige Kurve darstellt. Dann ist*

$$\psi = \frac{1}{\varrho\sqrt{r^2+1}} \begin{pmatrix} e^{-\lambda\sqrt{2(r^2+1)}\varrho i} \\ e^{\lambda\sqrt{2(r^2+1)}\varrho i} \end{pmatrix}$$

ein WK–Spinor der Länge $|\psi|^2 = -S\,|\chi|^2 = -S(|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2) = -2S$ *und WK–Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Der normalisierte Spinor*

$$\sqrt{\frac{-S}{|\lambda|\,|\psi|^2}}\psi = \frac{1}{\varrho\sqrt{2(r^2+1)|\lambda|}} \begin{pmatrix} e^{-\lambda\sqrt{2(r^2+1)}\varrho i} \\ e^{\lambda\sqrt{2(r^2+1)}\varrho i} \end{pmatrix}$$

ist somit ein Einstein–Spinor auf $M^3_\Gamma \cap M^4$ *mit Eigenwert* λ.

Der Homotopie–Typ von $M^3_\Gamma \cap M^4$ ist durch $\mathbb{R}^*_+ \times S^1 \times \Gamma$ gegeben; demzufolge hat es mindestens zwei Spin–Strukturen, und die hier vorliegende ist durch die globale Trivialisierung (1.3) bestimmt. Wir erinnern daran, daß $M^3_\Gamma \cap M^4$ durch den Längenparameter s der Kurve $\Gamma(s) = r(s)e^{i\varphi_\Gamma(s)} \subset \mathbb{C}$ und die Parameter $0 < \varrho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ der Faser parametrisiert ist. Die Metrik h_0 ist dann durch die Formel

$$h_0 = 2\big(\varrho^2 ds^2 + (r^2+1)(d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2)\big) + r\dot{r}\varrho\, ds\, d\varrho + r^2\dot{\varphi}_\Gamma \varrho^2 ds\, d\varphi$$

gegeben und der Ricci-Tensor hat Rang zwei, siehe Gleichung (2.6). Ähnliche Beispiele von WK–Spinoren auf einer dreidimensionalen, nicht vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit negativer Skalarkrümmung sind in [**8**] konstruiert worden.
Wir führen nun den Begriff eines T–Killing–Spinor, siehe [**9**], ein.

Definition 2.3. Sei (M^n, g) eine Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit. Ein Spinorfeld ψ ohne Nullstellen heißt *T–Killing–Spinor*, falls die Spur $\mathrm{Tr}(\hat{T}_\psi) = \frac{1}{\|\psi\|^2}\,\mathrm{Tr}(T_\psi)$ konstant ist und ψ eine Lösung der Feldgleichung

$$\nabla_X \psi = -\frac{1}{2}\hat{T}_\psi(X)\cdot\psi, \qquad X \in \mathcal{X}(M^n)$$

darstellt, wobei $\hat{T}_\psi(X,Y) = \frac{1}{\|\psi\|^2}T_\psi(X,Y)$ der Energie–Impuls–Tensor des normalisierten Spinors $\psi/\,\|\psi\|$ ist.

Wie zu Anfang bemerkt, ist (H^2, g_t) mit einer Hyper–Kähler–Struktur versehen und deshalb Ricci–flach und selbstdual. Aufgrund dieser Tatsache existiert ein paralleler Spinor auf H^2, mittels dessen Einschränkung auf M^3_Γ wir in der Lage sind, einen T–Killing–Spinor explizit zu konstruieren. Hierin folgen wir einer ähnlichen, in [**7, 9**] durchgeführten Konstruktion, wo die Einschränkung eines im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ gegebenen parallelen Spinors auf eine isometrisch eingebettete, geschlossene 2–Fläche konstanter mittlerer Krümmung betrachtet wird und hiermit Beispiele von T–Killing–Spinoren auf beliebigen Flächen konstanter mittlerer Krümmung im $\mathbb{R}^3$ produziert werden.
Wir betrachten zunächst die Einschränkung des Spinorbündels von H^2 auf die Untermannigfaltigkeit M^3_Γ (vgl. [**2**]). Hierzu bemerken wir, daß die Clifford–Darstellung Δ_{2k+2} direkt aus der Clifford–Darstellung Δ_{2k+1} konstruiert werden kann, indem man

$$\Delta_{2k+2} := \Delta_{2k+1} \oplus \Delta_{2k+1}$$

setzt und die Clifford–Multiplikation in Δ_{2k+2} mittels der Clifford–Multiplikation in Δ_{2k+1} gemäß

$$e_i \cdot (\psi_1 \oplus \psi_2) := e_i \cdot \psi_1 \oplus (-e_i \cdot \psi_2), \qquad 1 \le i \le 2k+1,$$
$$e_{2k+2} \cdot (\psi_1 \oplus \psi_2) := \psi_2 \oplus (-\psi_1)$$

definiert. Die Abbildung

$$f := i^{k+1}(e_1 \dots e_{2k+2}) : \Delta_{2k+2} \longrightarrow \Delta_{2k+2}$$

ist ein Automorphismus der entsprechenden Spin$(2k+2)$–Darstellung und infolge von $(e_1 \dots e_{2k+2})^2 = (-1)^{k+1}$ eine Involution. Die Spin–Darstellung Δ_{2k+2} zerfällt somit in die Eigenunterräume von f, und wir bezeichnen sie mit $\Delta^{\pm}_{2k+2}$. Explizit ist

$$f(\psi_1 \oplus \psi_2) = i^{k+1}(e_1 \dots e_{2k+1} \cdot \psi_2 \oplus e_1 \dots e_{2k+1} \cdot \psi_1)$$

und insbesondere ergibt sich für $k = 1$ die Relation

$$f(\psi_1 \oplus \psi_2) = -\big(e_1 e_2 e_3 \cdot \psi_2 \oplus e_1 e_2 e_3 \cdot \psi_1\big) = \psi_2 \oplus \psi_1,$$

da $e_1 e_2 e_3 = -1$ in der dreidimensionalen Clifford–Algebra gilt. Auf diese Weise erhält man

$$\Delta^{\pm}_4 = \{\psi_1 \oplus \psi_2 \in \Delta_4 : \psi_2 = \pm\psi_1\}\,,$$

d.h. ein Spinor in Δ^+_4 oder Δ^-_4 definiert auf eindeutige Weise einen Spinor in Δ_3 und umgekehrt. Wir haben somit zwei Isomorphismen von Spin(3)–Darstellungen

$$\Delta_3 \simeq \Delta^{\pm}_4 : \varphi_1 \longmapsto \varphi_1 \oplus (\pm\varphi_1) \tag{2.8}$$

definiert. Infolge der Tatsache, daß die vierdimensionale Spin–Mannigfaltigkeit (H^2, g_t) einfach zusammenhängend ist, besitzt sie lediglich eine Spin–Struktur, und wir bezeichnen das entsprechende Spinorbündel mit Σ_{H^2}. Es spaltet in die Bündel $\Sigma^+_{H^2}$ und $\Sigma^-_{H^2}$ gemäß der obigen Zerlegung von Δ_4 auf und infolge von $\Delta_4 = \Delta_3 \oplus \Delta_3$ und (2.8) erhalten wir die Identifikationen

$$\Sigma_{H^2|M^3_\Gamma} \simeq \Sigma \oplus \Sigma, \qquad \Sigma \simeq \Sigma^{\pm}_{H^2|M^3_\Gamma},$$

wobei Σ das induzierte Spinor–Bündel auf M^3_Γ ist. Wir betrachten nun ein Spinorfeld $\varphi^+ \in \Gamma(\Sigma^+_{H^2})$ und dessen Einschränkung $\varphi^+_{|M^3_\Gamma} = \varphi_1 \oplus \varphi_1$ auf M^3_Γ, wobei $\varphi_1 \in \Gamma(\Sigma)$ ein dreidimensionales Spinorfeld ist. Man beachte, daß insbesondere $N \cdot (\varphi_1 \oplus \varphi_1) = \varphi_1 \oplus (-\varphi_1)$ gemäß der oben beschriebenen Realisierung von Δ_4 gilt, wobei N das äußere Normalenvektorfeld an M^3_Γ bezeichnet. Bis zum Ende dieses Abschnitts stelle nun $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ ein beliebiges lokales Orthonormalreper an M^3_Γ dar. Unter Verwendung der lokalen Darstellungen für die verschiedenen kovarianten Ableitungen erhält man für die spinorielle kovariante Ableitung von φ^+ auf M^3_Γ die Relation

$$\begin{aligned}\nabla^{\Sigma_{H^2}}_X \varphi^+ &= d\varphi^+(X) + \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le 3} \omega_{ij}(X)\, Y_i \cdot Y_j \cdot (\varphi_1 \oplus \varphi_1)\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{1\le i<4} \omega_{i4}(X)\, Y_i \cdot N \cdot (\varphi_1 \oplus \varphi_1)\\ &= (\nabla^{\Sigma}_X \varphi_1 \oplus \nabla^{\Sigma}_X \varphi_1) - \frac{1}{2}(\nabla^{H^2}_X N \cdot \varphi_1 \oplus \nabla^{H^2}_X N \cdot \varphi_1)\end{aligned}$$

für jedes Vektorfeld $X \in TM^3_\Gamma$, da $\omega_{ij}(X) = g_t(\nabla^{H^2}_X Y_i, Y_j) = h_t(\nabla^{M^3_\Gamma}_X Y_i, Y_j)$ und $\omega_{i4}(X) = g_t(\nabla^{H^2}_X Y_i, N) = -h_t(Y_i, \nabla^{H^2}_X N)$. Da ein Teil des Weyl–Tensors des Eguchi–Hanson–Raumes H^2 verschwindet, können wir annehmen, daß der parallele Spinor in H^2 in $\Gamma(\Sigma^+_{H^2})$ enthalten und durch φ^+ gegeben ist. Damit gilt $\nabla^{\Sigma_{H^2}}_X \varphi^+ = 0$, und mittels $\mathrm{II}(X) = \nabla^{H^2}_X N$ erhalten wir für den entsprechenden dreidimensionalen Spinor φ_1 die Gleichung

$$\nabla^{\Sigma}_X \varphi_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{II}(X) \cdot \varphi_1.$$

Da weiter II eine symmetrische Bilinearform ist, stellt $\sum_{i=1}^{3} Y_i \cdot \mathrm{II}(Y_i) = -\mathfrak{H}$ eine skalare Größe dar und man erhält

$$\mathrm{D}^{\Sigma}\, \varphi_1 = \sum Y_i \cdot \nabla^{\Sigma}_{Y_i} \varphi_1 = -\frac{\mathfrak{H}}{2} \varphi_1;$$

da φ_1 durch Einschränkung eines parallelen Spinors gegeben ist, ist dessen Länge konstant. Wir fassen diese Ergebnisse in folgendem Lemma zusammen.

Lemma 2.1. *Es existiert ein Spinor $\psi^* \in \Gamma(\Sigma)$ im induzierten Spinorbündel von M^3_Γ mit*

$$\nabla^{\Sigma}_X \psi^* = -\frac{1}{2}\, \mathrm{II}(X) \cdot \psi^*, \qquad \mathrm{D}\, \psi^* = \frac{\mathfrak{H}}{2} \psi^*, \qquad \|\psi^*\| = 1.$$

□

Sei nun ψ^* wie in dem obigen Lemma. Dann ist $\nabla_X \psi^* = -(\mathrm{II}(X)/2) \cdot \psi^*$, so daß

$$\hat{T}_{\psi^*}(X, Z) = -\frac{1}{2\, \|\psi^*\|^2} \mathrm{Re}\, \langle X \cdot \mathrm{II}(Z) \cdot \psi^* + Z \cdot \mathrm{II}(X) \cdot \psi^*, \psi^* \rangle\,, \qquad X, Z \in \mathcal{X}(M^3_\Gamma).$$

Unter Verwendung der Relation $\mathrm{Re}\, \langle X \cdot \psi, \psi \rangle = 0$, welche allgemein für ein Vektorfeld X und einen Spinor ψ gilt, berechnet man hierfür in der Basis der Y_i

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\psi^*}(X, Z) &= -\frac{1}{2\, \|\psi^*\|^2} \mathrm{Re} \left\langle \sum_{i,j,k=1}^{3} (X^i Z^j + Z^i X^j)\, \mathrm{II}^*_{jk}\, Y_i \cdot Y_k \cdot \psi^*, \psi^* \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2\, \|\psi^*\|^2} \mathrm{Re} \left\langle -2 \sum_{i,j=1}^{3} X^i Z^j\, \mathrm{II}^*_{ij}\, \psi^*, \psi^* \right\rangle = \mathrm{II}(X, Z), \end{aligned}$$

da lediglich die Summanden mit $i = k$ verschieden von null sind. Insbesondere hat man

$$\mathrm{Tr}(\hat{T}_{\psi^*}) = -\frac{1}{\|\psi^*\|^2} \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Re}\, \langle Y_i \cdot \mathrm{II}^*(Y_i) \cdot \psi^*, \psi^* \rangle = \mathrm{Tr}\, \mathrm{II} = \mathfrak{H},$$

und es folgt, daß $\mathrm{Tr}(\hat{T}_{\psi^*})$ konstant ist, falls $\mathfrak{H}$ konstant ist. Da letzteres nur dann der Fall ist, falls $\mathfrak{H}$ identisch verschwindet, haben wir folgende Proposition gezeigt.

Proposition 2.6. *Sei M^3_Γ eine Minimalfläche, also Γ ein Großkreis in S^2, und Σ das induzierte Spinorbündel. Dann existiert ein T–Killing–Spinor $\psi^* \in \Gamma(\Sigma)$ mit $\mathrm{Tr}(\hat{T}_{\psi^*}) = 0$, der der Feldgleichung*

$$\nabla_X \psi^* = -\frac{1}{2} \hat{T}_{\psi^*}(X) \cdot \psi^* = -\frac{1}{2}\, \mathrm{II}(X) \cdot \psi^*$$

genügt. Für jede andere Wahl der Kurve Γ existieren keine T–Killing–Spinoren auf den betrachteten Hyperflächen.

3. Das Spektrum des Dirac–Operators

In diesem Abschnitt werden wir einige Eigenschaften des Spektrums $\sigma(\mathrm{D})$ des Dirac–Operators auf den Hyperflächen M^3_Γ studieren, wobei Γ eine geschlossene Kurve sei, so daß M^3_Γ vollständig ist. Der Dirac–Operator D einer Riemannschen Spin–Mannigfaltigkeit (M^n, g) ist ein elliptischer, formal selbstadjungierter Differentialoperator erster Ordnung. Insbesondere ist D als Differentialoperator abschließbar. Ist M vollständig, so ist D wesentlich selbstadjungiert als ein unbeschränkter Operator in $\mathrm{L}^2(\Sigma)$ mit Definitionsbereich $\mathrm{C}^\infty_0(M^n, \Sigma)$ und die Kerne von D und D^2 stimmen überein, siehe beispielsweise [**6**]. Dabei ist $\mathrm{L}^2(\Sigma)$ als die Vervollständigung von $\mathrm{C}_0^\infty(M^n,\Sigma)$, dem Raum aller glatten Schnitte in Σ mit kompaktem Träger, bezüglich der durch das Skalarprodukt

$$(\psi_1,\psi_2)=\int\limits_{M^n}\big\langle\psi_1(x),\psi_2(x)\big\rangle\,dM^n,\qquad \psi_i\in\mathrm{C}_0^\infty(M^n,\Sigma),$$

induzierten Norm definiert. Es ist $\sigma(\mathrm{D})=\sigma(\overline{\mathrm{D}})$. Ist M^n vollständig, so ist $\sigma(\overline{\mathrm{D}})$ reell und allein durch das Approximationsspektrum gegeben, da $\overline{\mathrm{D}}$ in diesem Fall kein Restspektrum hat. Ist zudem M^n nicht kompakt, so ist sowohl Punktspektrum als auch kontinuierliches Spektrum zu erwarten. Insbesondere werden wir dann an dem wesentlichen Spektrum von $\overline{\mathrm{D}}$ interessiert sein, welches durch

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathrm{D}}):=\big\{\lambda\in\mathbb{C}:\text{es existiert eine Weyl–Folge für }\lambda\text{ und }\overline{\mathrm{D}}\big\}$$

definiert ist; $\sigma(\overline{\mathrm{D}})$ zerfällt dann in die disjunkte Vereinigung von $\sigma_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathrm{D}})$ und dem diskreten Spektrum von $\overline{\mathrm{D}}$, welches die isolierten Eigenwerte endlicher Vielfachheit umfaßt. Das Hauptergebnis dieses Abschnittes wird darin bestehen zu zeigen, daß für geschlossene Kurven Γ und beliebige Parameterwerte t und $A\in\mathrm{U}(2)$ das Infimum von $\sigma(\overline{\mathrm{D}}^2)$ auf $(M^3_{A\Gamma},h_t)$ beliebig klein wird, also $0\in\sigma(\overline{\mathrm{D}}^2)$ infolge der Abgeschlossenheit des Spektrums gilt, und daß ebenfalls $0\in\sigma(\overline{\mathrm{D}})$. In dem besonderen Fall, daß Γ durch eine Möbius–Transformation aus einem Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung hervorgeht, beweisen wir zudem, daß die L^2–Kerne von D und $\overline{\mathrm{D}}$ trivial sind und somit $0\in\sigma_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathrm{D}})$ gilt. Da wir dabei von der globalen Trivialisierung (1.3) Gebrauch machen, gelten diese Resultate für die triviale Spin–Struktur.

Satz 2.2. *Sei Γ eine geschlossene Kurve und $\overline{\mathrm{D}}$ der Abschluß des Dirac–Operators auf den mit der trivialen Spin–Struktur versehenen Hyperflächen $(M^3_{A\Gamma},h_t)$, wobei $t>0$ und $A\in\mathrm{U}(2)$ ist. Dann ist*
a) $\inf\Big\{\lambda:\lambda\in\sigma(\overline{\mathrm{D}}^2)\Big\}<\delta$ *für beliebiges $\delta>0$,*
b) $0\in\sigma(\overline{\mathrm{D}})$.

Wir werden diese Aussage unter Verwendung des min–max–Prinzips beweisen und führen hierzu als Vorbereitung folgende Lemmata an.

Lemma 2.2. *Der $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$–Kern von D auf $(M^3_\Gamma\cap M^4,h_t)$ ist nicht trivial für beliebige Kurven Γ und Parameterwerte t.*

Beweis. Es bezeichne im folgenden $\{Y_1,Y_2,Y_3\}$ das in Teil 1, Abschnitt 2 eingeführte Orthonormalreper an M^3_Γ, siehe (1.3) auf Seite 7. Bezüglich der in vorigem Abschnitt eingeführten Realisierung der dreidimensionalen Clifford–Algebra gilt für $\psi\in\Gamma(\Sigma)$

$$\begin{aligned}\nabla_{Y_k}\psi=\begin{pmatrix}d\psi_1(Y_k)\\ d\psi_2(Y_k)\end{pmatrix}+\frac{1}{2\sqrt{h_{22}}}\Bigg[&\frac{(\log h_{33})_{,\varrho}}{2}\begin{pmatrix}0&-\omega^2(Y_k)\\ \omega^2(Y_k)&0\end{pmatrix}\\ &+(\log D)_{,\varrho}\begin{pmatrix}0&i\omega^3(Y_k)\\ i\omega^3(Y_k)&0\end{pmatrix}\Bigg]\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

d. h., $\nabla_{Y_1}\psi=d\psi(Y_1)$ für jedes ψ. Die Relation $d\psi_j=\sum_{i=1}^3 Y_i(\psi_j)\omega^i$ impliziert dann, daß der Dirac–Operator auf $(M^3_\Gamma\cap M^4,h_t)$ durch

$$\mathrm{D}\,\psi=\begin{pmatrix}iY_1(\psi_1)+iY_2(\psi_2)-Y_3(\psi_2)\\ -iY_1(\psi_2)+iY_2(\psi_1)+Y_3(\psi_1)\end{pmatrix}+\frac{i}{\varrho\sqrt{h_{22}}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

gegeben ist, da

$$\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\Big(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{2}(\log K)_{,\varrho}-(\log D)_{,\varrho}\Big)=\frac{2}{\varrho\sqrt{h_{22}}}.$$

Berücksichtigt man $\Sigma=\varrho/\sqrt{\det h_t}=1/2\varrho\sqrt{h_{22}}$, so erhält man auf $M^3_\Gamma\cap M^4$ für den Dirac–Operator das System von partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left[i\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)\psi_1-\frac{1}{2\varrho}\Omega_I\psi_2\right]&=\lambda\psi_1,\\ \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left[-i\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)\psi_2+\frac{1}{2\varrho}\Omega_{II}\psi_1\right]&=\lambda\psi_2,\end{aligned}\tag{2.9}$$

wobei

$$\begin{aligned}\Omega_1&=(r^2+1)K\frac{\partial}{\partial s}-r\dot r\varrho K\frac{\partial}{\partial\varrho}-(r^2\dot\varphi_\Gamma K+2i)\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \Omega_{II}&=(r^2+1)K\frac{\partial}{\partial s}-r\dot r\varrho K\frac{\partial}{\partial\varrho}-(r^2\dot\varphi_\Gamma K-2i)\frac{\partial}{\partial\varphi}.\end{aligned}$$

Sei nun $\lambda=0$ und ψ von der Form $\psi=\psi(\varrho,s)=\varrho^{-1}\gamma(s)$. Offensichtlich ist dann

$$i\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)\psi_j(\varrho,s)=i\gamma_j(s)\left(-\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}\right)=0$$

sowie

$$r\dot r\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\psi_j(\varrho,s)=-\frac{r\dot r}{\varrho}\gamma_j(s),\qquad (r^2+1)\frac{\partial}{\partial s}\psi_j(\varrho,s)=\frac{r^2+1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial s}\gamma_j(s).$$

Gleichsetzen dieser Ausdrücke ergibt dann

$$\frac{\partial}{\partial s}(\log\gamma_i)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(\log(r^2+1))$$

für γ, so daß mittels Integration

$$\log\gamma_j=-\frac{1}{2}\log(r^2+1)+\log C_j$$

folgt. Indem man $\gamma_j=(r^2+1)^{-1/2}C_j$ setzt, sieht man, daß

$$\psi=\frac{1}{\varrho\sqrt{r^2+1}}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix},\qquad C_i\in\mathbb{C}\,\text{konstant},$$

harmonische Spinoren auf $M^3_\Gamma\cap M^4$ sind. Da weiter

$$\int_U\|\psi\|^2\,dM^3_\Gamma=\int_U\|\psi\|^2\sqrt{\det h_t}\,ds\wedge d\varrho\wedge d\varphi,$$

wobei $U\subset M^3_\Gamma$ eine offene Teilmenge ist, und $\det h_t=4\varrho^4h_{22}$ ist, sind die harmonischen Spinoren ψ in $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$. □

Lemma 2.3. *Sei Γ eine beliebige Kurve in $\mathbb{C}$ und $t>0$ beliebig. Dann existiert ein $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$–harmonischer Spinor ψ_0 auf $M^3_\Gamma\cap M^4$, der für $\epsilon\to 0$ punktweise durch Spinoren $\psi_\epsilon\in\Gamma(\Sigma)\cap\mathrm{L}^2(\Sigma)$ approximiert werden kann, so daß $\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\in\mathrm{L}^2(\Sigma)$.*

Beweis. Zu Beginn bemerken wir, daß $\sqrt{-S}$ für $t \to 0$ punktweise gegen $1/\varrho\sqrt{r^2+1}$ konvergiert, so daß es nahe liegt, die Funktion

$$S_\epsilon := -\frac{\varrho^4(r^2+1)^2}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{3/2}}, \qquad \epsilon > 0,$$

einzuführen, indem man in S den Parameter t des Kähler–Potentials durch den neuen Parameter ϵ ersetzt. Man berechnet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\,\varrho}\sqrt{-S_\epsilon} &= \frac{1}{\varrho}\sqrt{-S_\epsilon}\frac{2\epsilon^4-\varrho^4(r^2+1)^2}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial\,\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)\sqrt{-S_\epsilon} &= \frac{1}{\varrho}\sqrt{-S_\epsilon}\frac{3\epsilon^4}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4} \end{aligned}$$

sowie

$$\Omega_I\sqrt{-S_\epsilon} = 0, \qquad \Omega_{II}\sqrt{-S_\epsilon} = 0,$$

da $(r^2+1)S_{\epsilon,s} = r\dot{r}\varrho S_{\epsilon,\varrho}$. Jede andere Funktion in ϱ und s der Funktionalabhängigkeit $\varrho\sqrt{r^2+1}$ ist ebenfalls harmonisch bezüglich Ω_I und Ω_{II}. Wir setzen

$$\text{(2.10)} \qquad \psi_\epsilon := \sqrt{-S_\epsilon}e^{-3\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}, \qquad C_i \in \mathbb{C} \quad \text{konstant.}$$

Für $\epsilon \to 0$ erhält man dann

$$\psi_\epsilon \to \frac{1}{\varrho\sqrt{r^2+1}}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}.$$

Wie bereits bemerkt, ist $\Omega_I\psi_\epsilon = 0$, $\Omega_{II}\psi_\epsilon = 0$, so daß

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,\psi_\epsilon &= \frac{i}{\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{\partial}{\partial\,\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)\left[\sqrt{-S_\epsilon}e^{-3\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}\right]\begin{pmatrix}C_1\\-C_2\end{pmatrix} \\ &= \frac{3\epsilon^4 i}{\varrho\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{1}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}-\varrho\sqrt{r^2+1}\right)\sqrt{-S_\epsilon}e^{-3\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}\begin{pmatrix}C_1\\-C_2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man berechnet dann, unter Voraussetzung von $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \|\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2} &= \int(-S_\epsilon)e^{-6\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}(|C_1|^2+|C_2|^2)dM^3_\Gamma \\ &= 2\pi\,C\int_0^\infty\int_0^L(-S_\epsilon)\sqrt{\det h_t}e^{-6\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}ds\wedge d\varrho < \infty \end{aligned}$$

mit $C = |C_1|^2+|C_2|^2$ sowie

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &= \int(-S_\epsilon)e^{-6\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}(|C_1|^2+|C_2|^2)\frac{9\epsilon^8}{h_{22}\varrho^2}\left(\frac{1}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}-\varrho\sqrt{r^2+1}\right)^2 dM^3_\Gamma \\ &= 2\pi C\int_0^\infty\int_0^L(-S_\epsilon)\sqrt{\det h_t}e^{-6\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}\frac{9\epsilon^8}{h_{22}\varrho^2}\left(\frac{1}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}-\varrho\sqrt{r^2+1}\right)^2 ds\wedge d\varrho \end{aligned}$$

d. h. die ψ_ϵ sind L^2–Näherungen von $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$–harmonischen Spinoren,

$$\mathrm{L}^2(\Sigma)\cap\Gamma(\Sigma) \ni \psi_\epsilon \to \psi_0 \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma),$$

und $\mathrm{D}\,\psi_\epsilon$ ist ebenfalls in L^2. □

Im folgenden werden wir die Abkürzungen

$$p_\epsilon := \sqrt{\det h_t}\, e^{-6\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}, \qquad q_\epsilon := \frac{9\epsilon^8}{h_{22}\,\varrho^2}\left(\frac{1}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4} - \varrho\sqrt{r^2+1}\right)^2$$

benützen; für $\epsilon \to 0$ gilt dann

$$-S_\epsilon\, p_\epsilon \to \frac{\sqrt{\det h_t}}{\varrho^2(r^2+1)}, \qquad -S_\epsilon\, p_\epsilon\, q_\epsilon \to 0$$

punktweise. Sei ψ_ϵ wie in (2.10); während $\|\psi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2}$ unbeschränkt für $\epsilon \to 0$ wird, folgt nicht notwendig, daß $\|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} \to 0$ für kleine ϵ. Nichtsdestotrotz werden wir zeigen, daß für gegebenes $\delta > 0$ und hinreichend kleines ϵ die Ungleichung $\|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} \,/\, \|\psi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} < \delta$ gilt und auf diese Weise Satz 2.2 beweisen. Zu diesem Zweck müssen präzise Abschätzungen des Rayleigh–Quotienten $\|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2} \,/\, \|\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2}$ von oben durchgeführt werden, wobei es darauf ankommt, von ϱ unabhängige Schranken zu finden.

Beweis von Satz 2.2. Sei ψ_ϵ wie in Lemma 2.3, Gleichung (2.10). Man berechnet zunächst

$$-S_\epsilon\sqrt{\det h_t} = \frac{2\sqrt{2}\varrho^7(r^2+1)^3}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{3/2}(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^{1/4}},$$

$$\frac{\partial}{\partial\,\varrho}\Big(-S_\epsilon\sqrt{\det h_t}\Big) = \frac{2\sqrt{2}(r^2+1)^3\varrho^6\big[\varrho^4(r^2+1)^2(t^4+6\epsilon^4)+7\epsilon^4t^4\big]}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{5/2}(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^{5/4}} > 0,$$

$$\sup_{\varrho>0}(-S_\epsilon\sqrt{\det h_t}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r^2+1}};$$

demzufolge ist $-S_\epsilon\sqrt{\det h_t}$ strikt monoton wachsend und geht für $\varrho \to \infty$ asymptotisch gegen $2\sqrt{2}/\sqrt{r^2+1}$, so daß es sich als naheliegend erweist, $\|\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2}$ nach unten gemäß

$$\|\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2} = 2\pi C\int_0^L\int_0^\infty(-S_\epsilon\, p_\epsilon)\, d\varrho\wedge ds \geq 2\pi C\int_0^L \inf_{\varrho\geq P}(-S_\epsilon\sqrt{\det h_t})\int_P^\infty e^{-6\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}d\varrho\wedge ds$$

abzuschätzen. Hier stellt $P > 0$ einen geeignet zu bestimmenden Abschneidepunkt dar, der so zu wählen sein wird, daß die entstehende untere Schranke für $\|\psi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2}$ so groß wie möglich wird. Eine mögliche Wahl wäre durch den Wendepunkt P_w von $-S_\epsilon\sqrt{\det h_t}$ gegeben, der aus der Bedingung $(-S_\epsilon\sqrt{\det h_t})_{,\varrho^2} = 0$ durch Lösen von

$$(u_1^2+\epsilon^4)(u_1^2+t^4)[30u_1^2\epsilon^4+42\epsilon^4t^4] = 5u_1^2[t^4(u_1^2+\epsilon^4)^2+12\epsilon^4(u_1^2+t^4)^2],$$

einer Gleichung dritten Grades in $u_1^2 = \varrho^4(r^2+1)^2$, berechnet werden kann. Da sich dies als etwas aufwendig herausstellt und nicht notwendig zu optimalen Abschätzungen führt, suchen wir stattdessen eine Bedingung für ϱ derart zu finden, daß

$$0 < \frac{\partial}{\partial\,\varrho}\big(-S_\epsilon\sqrt{\det h_t}\big)|_\varrho \leq a \ll 1, \tag{2.11}$$

d. h.,

$$\begin{aligned}&\big[\varrho^4(r^2+1)^2\big]^{6/5}\big[6\epsilon^4(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)+t^4(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)\big]^{4/5}\\ &\qquad\leq\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^{4/5}(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^2(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4).\end{aligned}$$

Dies ist erfüllt, falls

$$\left[(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)(6\epsilon^4+t^4)\right]^{4/5} \leq \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^{4/5} \left[\varrho^4(r^2+1)^2\right]^{4/5}(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4),$$

wobei $\epsilon < t^4$ angenommen werde. Für kleines ϵ und t stellt dies eine nicht viel stärkere Bedingung dar. Sie ist erfüllt, falls

$$\left(\frac{2\sqrt{2}(6\epsilon^4+t^4)}{a}\right)^4 \leq [\varrho^4(r^2+1)^2]^5,$$

und wir setzen

$$P_a := \mu(\epsilon,t,a)\,\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}, \qquad \text{wobei} \qquad \mu(\epsilon,t,a) := \sqrt[5]{\frac{2\sqrt{2}(6\epsilon^4+t^4)}{a}}.$$

Man berechnet dann

$$\inf_{\varrho\geq P_a}(-S_\epsilon\sqrt{\det h_t}) = -S_\epsilon\sqrt{\det h_t}|_{P_a} = M(\epsilon,t,a)\,\frac{1}{\sqrt{r^2+1}},$$

wobei die Funktion M durch

$$M(\epsilon,t,a) := \frac{2\sqrt{2}\mu^7}{(\mu^4+\epsilon^4)^{3/2}(\mu^4+t^4)^{1/4}}$$

gegeben ist. Wir bemerken, daß mit $\epsilon \to 0$ die Funktionen μ und M gegen einen endlichen, von ϱ unabhängigen Wert konvergieren, nämlich

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mu(\epsilon,t,a) = \sqrt[5]{\frac{2\sqrt{2}t^4}{a}}, \qquad \lim_{\epsilon\to 0} M(\epsilon,t,a) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt[5]{\left(\frac{2\sqrt{2}}{at}\right)^4}}{\sqrt[5]{\left(\frac{2\sqrt{2}}{at}\right)^4}+1}\right)^{1/4},$$

wobei der Abschneidepunkt P_a ebenfalls endlich bleibt. Wir erhalten schließlich für $\|\psi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2}$ eine Abschätzung der Form

$$\begin{aligned} \|\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2} &\geq 2\pi C\int_0^L \inf_{\varrho\geq P_a}(-S_\epsilon\sqrt{\det h_t})\int_{P_a}^\infty e^{-6\epsilon^4\varrho\sqrt{r^2+1}}d\varrho\wedge ds \\ &= 2\pi C M(\epsilon,t,a)\int \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}\,\frac{e^{-6\epsilon^4 P_a\sqrt{r^2+1}}}{6\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}ds. \end{aligned}$$

Man beachte, daß M gegen $2\sqrt{2}$ geht, falls zusätzlich $at \to 0$, so daß der Wert von $-S_\epsilon\sqrt{\det h_t}$ am Punkte P_a beliebig nahe an $\sup_\varrho(-S_\epsilon\sqrt{\det h_t}) = 2\sqrt{2/r^2+1}$ heranreicht. Dies kann stets erreicht werden, indem man a klein genug wählt, obwohl für großes t der Abschneidepunkt P_a ebenfalls groß wird. Wir werden jedoch sehen, daß dies für die folgenden Betrachtungen keine Rolle spielt. Für kleines t ist obige Abschätzung präziser, da dann P_a ebenfalls klein ist.
Wir wenden uns nun $\|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2}$ zu. Es ist

$$\begin{aligned} &-S_\epsilon\, q_\epsilon\,\sqrt{\det h_t} \\ &= 9\sqrt{2}\epsilon^8\varrho^3(r^2+1)\frac{\sqrt[4]{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{3/2}}\left(\frac{1}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}-\varrho\sqrt{r^2+1}\right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

und wir setzen

$$\Delta^2 := \frac{\varrho^2}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}\left(\frac{1}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4} - \varrho\sqrt{r^2+1}\right)^2,$$
$$\Lambda := \varrho(r^2+1)\frac{\sqrt[4]{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}},$$

so daß $-S_\epsilon\, q_\epsilon \sqrt{\det h_t} = 9\sqrt{2}\epsilon^8\Lambda\Delta^2$. Die Funktion Λ verschwindet lediglich für $\varrho = 0$. Die Nullstellen von Δ sind $\varrho = 0$ und die Lösungen der Gleichung fünften Grades in ϱ,

$$\varrho\sqrt{r^2+1}\big(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4\big) - 1 = 0. \tag{2.12}$$

Der Ausdruck $\varrho\sqrt{r^2+1}$ wird für $\varrho = 0$ null und ist strikt monoton wachsend, während $(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^{-1}$ gleich t^{-4} für $\varrho = 0$ und strikt monoton fallend ist. Die Gleichung (2.12) hat deshalb genau eine Lösung im Reellen; sie ist positiv und wird im folgenden mit Q bezeichnet. Man beachte, daß Q größer als 0 und von oben durch $1/\sqrt{r^2+1}$ beschränkt ist. Da $-S_\epsilon q_\epsilon\sqrt{\det h_t}$ nicht negativ ist und $(-S_\epsilon q_\epsilon\sqrt{\det h_t})_{,\varrho} = 9\sqrt{2}\epsilon^8\Delta(2\Lambda\Delta_{,\varrho} + \Delta\Lambda_{,\varrho})$, sind die Zahlen 0 und Q die einzigen absoluten Minima von $-S_\epsilon q\sqrt{\det h_t}$. Somit kann Δ gemäß

$$|\Delta| = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}}\left|\frac{1}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4} - \varrho\sqrt{r^2+1}\right| \le$$
$$\le \begin{cases} \frac{\varrho^2\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}} & \text{für } \varrho \ge Q, \\ \frac{\varrho}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{3/2}} & \text{für } \varrho \le Q \end{cases}$$

abgeschätzt werden. Die Relation

$$\frac{\partial}{\partial\,\varrho}\left(\frac{\varrho^2\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}}\right) = \frac{2\varrho\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{3/2}} > 0$$

impliziert zusammen mit

$$\sup_\varrho \frac{\varrho^2\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}$$

die Abschätzung

$$|\Delta| \le \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \qquad \text{for } \varrho \ge Q.$$

Auf ähnliche Weise sieht man vermöge

$$\frac{\partial}{\partial\,\varrho}\left(\frac{\varrho}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{3/2}}\right) = \frac{\epsilon^4 - 5\varrho^4(r^2+1)^2}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{5/2}},$$

daß $\varrho(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{-3/2}$ ein Maximum bei $\varrho_{max} = \frac{\epsilon}{\sqrt[4]{5}\sqrt{r^2+1}}$ und dort den Wert

$$\frac{\varrho}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{3/2}}\Big|_{\varrho_{max}} = \frac{1}{\epsilon^5\sqrt[4]{5}(6/5)^{3/2}\sqrt{r^2+1}}$$

annimmt, und wir erhalten die Abschätzung

$$|\Delta| \le \frac{1}{\epsilon^5\sqrt[4]{6^6/5^5}\sqrt{r^2+1}} \qquad \text{for } \varrho \le Q.$$

Nun geht Λ für $\varrho \to \infty$ asymptotisch gegen $\sqrt{r^2+1}$ und man berechnet

$$\frac{\partial}{\partial\,\varrho}\Lambda = \frac{(r^2+1)\big[\epsilon^4 t^4 + (2\epsilon^4 - t^4)\varrho^4(r^2+1)^2\big]}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{3/2}(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^{3/4}},$$

so daß für $2\epsilon^4 < t^4$ man erkennt, daß Λ ein Maximum bei $\varrho'_{\max} = \frac{\epsilon t}{\sqrt[4]{t^4-2\epsilon^4}}\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}$ hat; anderenfalls ist Λ strikt monoton wachsend. Setzt man $\varrho'_{\max}$ in Λ ein, so erhält man

$$\Lambda_{|\varrho'_{\max}} = \sqrt{r^2+1}\frac{t}{\epsilon}N(\epsilon,t),$$

wobei

$$N(\epsilon,t) := \frac{t}{\sqrt[4]{t^4-2\epsilon^4}}\frac{\sqrt[4]{\frac{\epsilon^4}{t^4-2\epsilon^4}+1}}{\sqrt{\frac{t^4}{t^4-2\epsilon^4}+1}},$$

und es ergibt sich für Λ die Abschätzung

$$\Lambda \leq \begin{cases} \sqrt{r^2+1} & \text{für} \quad 2\epsilon^4 \geq t^4, \\ \sqrt{r^2+1}N(\epsilon,t)\frac{t}{\epsilon} & \text{für} \quad 2\epsilon^4 < t^4, \end{cases}$$

Für $\epsilon \to 0$ geht die Funktion N gegen $1/\sqrt{2}$. Zusammenfassend erhalten wir somit unter der Annahme $2\epsilon^4 < t^4$, daß $-S_\epsilon q\sqrt{\det h_t}$ von oben gemäß

$$-S_\epsilon q_\epsilon\sqrt{\det h_t} = 9\sqrt{2}\epsilon^8\Lambda\Delta^2 \leq \begin{cases} \frac{9\sqrt{2}N(\epsilon,t)}{\sqrt{r^2+1}}t\epsilon^7 & \text{für} \quad \varrho \geq Q, \\ \frac{9\sqrt{2}N(\epsilon,t)}{\kappa^2\sqrt{r^2+1}}\frac{t}{\epsilon^3} & \text{für} \quad \varrho \leq Q \end{cases}$$

abgeschätzt werden kann, wobei $\kappa := \sqrt[4]{6^6/5^5}$; wir erhalten schließlich für $\|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2}$ unter der Annahme, daß ϵ klein ist,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2} &\leq 2\pi C\int_0^L \sup_{\varrho\leq Q}(-S_\epsilon q_\epsilon\sqrt{\det h_t})\int_0^Q e^{-6\varrho\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}\,d\varrho\wedge ds \\ &\quad + 2\pi C\int_0^L \sup_{\varrho\geq Q}(-S_\epsilon q_\epsilon\sqrt{\det h_t})\int_Q^\infty e^{-6\varrho\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}\,d\varrho\wedge ds \\ &= 2\pi C\int_0^L \frac{9\sqrt{2}N(\epsilon,t)t}{\sqrt{r^2+1}}\left(\frac{1}{\kappa^2\epsilon^3}\frac{1-e^{-6Q\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}}{6\epsilon^4\sqrt{r^2+1}} + \epsilon^7\frac{e^{-6Q\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}}{6\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}\right)ds. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für den Rayleigh–Quotienten unter der Annahme $2\epsilon^4 < t^4$ die Abschätzung

$$\frac{\|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2}}{\|\psi_\epsilon\|^2_{\mathrm{L}^2}} \leq \frac{9\sqrt{2}N(\epsilon,t)t}{M(\epsilon,t,a)}\frac{\int\left(\epsilon^{-3}\kappa^{-2}(1-e^{-6Q\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}) + \epsilon^7\,e^{-6Q\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}\right)ds}{\int e^{-6P_a\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}\,ds}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{e^{-6Q\epsilon^4\sqrt{r^2+1}}-1}{\epsilon^3} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!}(-6Q\sqrt{r^2+1})^k\,\epsilon^{4k-3}$$

geht für $\epsilon \to 0$ gegen null, so daß der Rayleigh–Quotient selbst beliebig klein für $\epsilon \to 0$ wird. Da für geschlossene Kurven Γ die Hyperflächen M^3_Γ vollständig sind, sind $\overline{\mathrm{D}}$ und damit $\overline{\mathrm{D}}^2$ selbstadjungiert, und nach dem min–max–Prinzip, siehe beispielsweise [**22**], gilt

$$\inf\Big\{\lambda : \lambda \in \sigma(\overline{\mathrm{D}}^2)\Big\} = \inf_{0\neq\psi\in\mathcal{D}(\overline{\mathrm{D}}^2)} \frac{\big\|\overline{\mathrm{D}}\psi\big\|^2_{\mathrm{L}^2}}{\|\psi\|^2_{\mathrm{L}^2}},$$

da offenbar $\overline{\mathrm{D}}^2$ von unten beschränkt ist; dabei ist der Definitionsbereich des Abschlusses $\overline{\mathrm{D}}$ des Dirac–Operators durch

$$\mathcal{D}(\overline{\mathrm{D}}) = \Big\{\psi \in \mathrm{L}^2(\Sigma) : \exists\, \text{eine Folge}\, \psi_n \in \mathcal{D}(\mathrm{D}) : \psi_n \to \psi \,\text{und}$$
$$\mathrm{D}\,\psi_n \,\text{konvergiert in}\, \mathrm{L}^2(\Sigma)\Big\}$$

gegeben. Ist $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{D}})\cap\Gamma(\Sigma)$, so gilt $\overline{\mathrm{D}}\psi = \mathrm{D}\,\psi$. Da für den Fall, daß M^3_Γ vollständig ist, die Ungleichungen $\int \|\psi_\epsilon\|^2\, dM^3_\Gamma < \infty$, $\int \|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|^2\, dM^3_\Gamma < \infty$ und $\int \big\|\mathrm{D}^2\,\psi_\epsilon\big\|^2\, dM^3_\Gamma < \infty$ implizieren, daß ψ_ϵ in $\mathcal{D}(\overline{\mathrm{D}})$ bzw. $\mathcal{D}(\overline{\mathrm{D}}^2)$ liegt, folgt schließlich a). Denn sei $p_0 \in M^3_\Gamma$ fest und $\mu(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ die in (2.2) definierte Funktion. Wir setzen dann

$$b_n(p) := \mu\Big(2 - \frac{\mathrm{dist}\,(p,p_0)}{n}\Big), \qquad n = 1,2,\ldots, \quad p \in M^3_\Gamma,$$

vgl. [**6**]. Dann gilt $b_n \equiv 1$ auf $B_n(p_0)$ und $\mathrm{supp}\, b_n \subset B_{2n}(p_0)$. Weiterhin ist b_n Lipschitz–stetig, also fast überall differenzierbar und $|\,\mathrm{grad}\, b_n|^2 \leq M/n^2$, wobei M eine Konstante ist. Da M^3_Γ vollständig ist, sind die abgeschlossenen Hüllen der geodätischen Kugeln $B_n(p_0)$ kompakt in M^3_Γ und demnach

$$\psi_n := b_n\,\psi_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathrm{D}) = \mathrm{C}^\infty_0(M^3_\Gamma,\Sigma).$$

Da $\|\psi_\epsilon\|^2_{L^2} < \infty$, gilt $\psi_n \to \psi_\epsilon$ in $\mathrm{L}^2(\Sigma)$. Ebenso impliziert $\|\mathrm{D}\,\psi_\epsilon\|^2_{L^2} < \infty$ mittels der Relation $\mathrm{D}\,\psi_n = b_n\,\mathrm{D}\,\psi_\epsilon + \mathrm{grad}\, b_n \cdot \psi_\epsilon$, daß $\mathrm{D}\,\psi_n \to \mathrm{D}\,\psi_\epsilon$ in $\mathrm{L}^2(\Sigma)$. Damit folgt $\psi_\epsilon \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{D}})$ und entsprechend $\mathrm{D}\,\psi_\epsilon \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{D}})$. Indem man schließlich $\tilde{\psi}_\epsilon := \psi_\epsilon / \|\psi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2}$ setzt, erhält man eine Folge von Elementen in $\mathcal{D}(\overline{\mathrm{D}}) \cap \Gamma(\Sigma)$ der Länge eins mit $\|\,\mathrm{D}\,\tilde{\psi}_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} \to 0$ für $\epsilon \to 0$. Es ergibt sich $0 \in \sigma_{\mathrm{approx}}(\overline{\mathrm{D}}) = \sigma(\overline{\mathrm{D}})$ und damit b).

□

Im folgenden wenden wir uns dem L^2–Kern des Dirac–Operators für den Fall, daß $\Gamma = re^{i\varphi_\Gamma}$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung vom Radius r ist, zu. Sei $p = \Psi(s,\varrho,\varphi) \in M^3_\Gamma \cap M^4$ und $z = e^{i\tau} \in S^1$. Wie in Abschnitt 4 des ersten Teiles dargelegt, sind in diesem Fall durch

$$\kappa_z : M^3_\Gamma \cap M^4 \longrightarrow M^3_\Gamma \cap M^4, \kappa_z(p) = \Psi(s,\varrho,(\varphi+\tau)\,\mathrm{mod}\,2\pi),$$
$$\mu_z : M^3_\Gamma \cap M^4 \longrightarrow M^3_\Gamma \cap M^4,\ \mu_z(p) = \Psi((s+\tau)\,\mathrm{mod}\,2\pi r,\varrho,\varphi)$$

zwei isometrische S^1–Wirkungen auf $M^3_\Gamma \cap M^4$ gegeben. Setzt man

$$(\kappa_z\psi)(p) := \psi(\kappa_{z^{-1}}(p)) \qquad \text{und} \qquad (\mu_z\psi)(p) := \psi(\mu_{z^{-1}}(p)),$$

so erhält man zwei stetige unitäre S^1–Darstellungen auf $\mathrm{L}^2(\Sigma)$, da infolge der Invarianz der Volumenform unter κ_z und μ_z die Gleichheit

$$\int \big\langle \psi(\kappa_{z^{-1}}(p)), \varphi(\kappa_{z^{-1}}(p))\big\rangle\, dM^3_\Gamma(p) = \int \big\langle \psi(p),\varphi(p)\big\rangle\, (\kappa_z)^*(dM^3_\Gamma)(p), \qquad \varphi,\psi \in L^2(\Sigma),$$

gilt sowie entsprechend für μ_z. Nach dem Satz von Stone existieren dann eindeutig bestimmte selbstadjungierte Operatoren M und M_1 derart, daß $\kappa_{e^{i\tau}} = e^{i\tau M}$, $\mu_{e^{i\tau}} = e^{i\tau M_1}$

gilt. Sie berechnen sich zu $M = i\,\partial_\varphi$, $M_1 = i\,\partial_s$, während die zugehörigen Eigenfunktionen durch

$$i\frac{\partial}{\partial\varphi}e^{i\alpha\varphi} = -\alpha e^{i\alpha\varphi}, \qquad i\frac{\partial}{\partial s}e^{i\alpha\varphi_\Gamma} = -\beta\dot{\varphi}_\Gamma e^{i\beta\varphi_\Gamma}$$

gegeben sind, wobei α und β ganze Zahlen sind und $\dot{\varphi}_\Gamma = \epsilon/r$, $\epsilon = \pm 1$, ist. Wegen $\mathrm{D}_{|p} = \mathrm{D}_{|\kappa_z(p)} = \mathrm{D}_{|\mu_z(p)}$ vertauscht D jeweils mit κ_z und μ_z, so daß jeder der Eigenunterräume E_λ von D bzw. $\overline{\mathrm{D}}$ zum Eigenwert λ in die Eigenunterräume der unitären $S^1\times S^1$–Wirkung gemäß

$$E_\lambda = \bigoplus_{\alpha,\beta}\mathcal{H}^\lambda_\alpha \otimes \mathcal{H}^\lambda_\beta,$$

der Spektralzerlegung der Operatoren M und M_1 entsprechend, zerfällt; insbesondere ist $\mathrm{Ker}_{L^2}(\mathrm{D}) = \bigoplus_{\alpha,\beta}\mathcal{H}_\alpha \otimes H_\beta$. Eine allgemeine Lösung der Dirac–Gleichung $\mathrm{D}\,\psi = \lambda\psi$ auf $M^3_\Gamma \cap M^4$ kann dann als ein Produkt von der Form

$$\psi(s,\varrho,\varphi) = e^{i\alpha\varphi}e^{i\beta\varphi_\Gamma(s)}R(\varrho) \tag{2.13}$$

angesetzt werden, wobei R eine Funktion in ϱ ist. Das System partieller Differentialgleichungen (2.9) geht demzufolge in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left[i\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)R_1 - \frac{i}{2\varrho}\Big((r^2+1)K\beta\dot{\varphi}_\Gamma - (r^2\dot{\varphi}_\Gamma K + 2i)\alpha\Big)R_2\right] &= \lambda R_1,\\ \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left[-i\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)R_2 + \frac{i}{2\varrho}\Big((r^2+1)K\beta\dot{\varphi}_\Gamma - (r^2\dot{\varphi}_\Gamma K - 2i)\alpha\Big)R_1\right] &= \lambda R_2,\end{aligned} \tag{2.14}$$

für die Radialfunktion $R(\varrho)$ über. Wir setzen

$$f := \big(\delta K - i\alpha\big)/\varrho, \qquad\qquad g := \big(\delta K + i\alpha\big)/\varrho,$$

wobei wir die Bezeichung $\delta := \big((r^2+1)\beta - r^2\alpha\big)\dot{\varphi}_\Gamma/2$ einführten, und nehmen die Substitution

$$\chi := C\,\varrho\begin{pmatrix} e^{i\lambda\int\sqrt{h_{22}}d\varrho}R_1(\varrho)\\ e^{-i\lambda\int\sqrt{h_{22}}d\varrho}R_2(\varrho)\end{pmatrix}$$

vor, so daß sich für χ das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varrho}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} &= \frac{1}{\varrho}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\lambda\sqrt{h_{22}} & 0\\ 0 & -i\lambda\sqrt{h_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}\\ +C\,\varrho&\begin{pmatrix} e^{i\lambda\int\sqrt{h_{22}}d\varrho} & 0\\ 0 & e^{-i\lambda\int\sqrt{h_{22}}d\varrho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\varrho - i\lambda\sqrt{h_{22}} & f\\ g & -1/\varrho + i\lambda\sqrt{h_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & \tilde{f}\\ \tilde{g} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit $\tilde{f} := e^{2i\lambda\int\sqrt{h_{22}}d\varrho}f$, $\tilde{g} := e^{-2i\lambda\int\sqrt{h_{22}}d\varrho}g$ ergibt. Dabei ist

$$\int\sqrt{h_{22}}d\varrho = \frac{(r^2+1)\varrho^2}{\sqrt{2}(\varrho^4(r^2+1)^2+t^4)^{1/4}}\left(1+\frac{\varrho^4(r^2+1)^2}{t^4}\right)^{1/4}\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{4}{3},-\frac{\varrho^4(r^2+1)^2}{t^4}\right).$$

Für den Fall, daß entweder α oder β von null verschieden sind, werden f und g nicht null; nochmalige Differentiation ergibt dann

$$\begin{aligned}(\chi_1)_{,\varrho^2} &= \tilde{f}_{,\varrho}\,\chi_2 + \tilde{f}\,(\chi_2)_{,\varrho} = (\log\tilde{f})_{,\varrho}\,(\chi_1)_{,\varrho} + \tilde{f}\,\tilde{g}\,\chi_1,\\ (\chi_2)_{,\varrho^2} &= \tilde{g}_{,\varrho}\,\chi_1 + \tilde{g}\,(\chi_1)_{,\varrho} = (\log\tilde{g})_{,\varrho}\,(\chi_2)_{,\varrho} + \tilde{f}\,\tilde{g}\,\chi_2\end{aligned}$$

und führt auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\chi_1}{d\varrho^2}(\varrho) + p(\varrho)\,\frac{d\chi_1}{d\varrho}(\varrho) + q(\varrho)\,\chi_1(\varrho) = 0, \tag{2.15}$$

$$\frac{d^2\chi_2}{d\varrho^2}(\varrho) + \bar{p}(\varrho)\,\frac{d\chi_2}{d\varrho}(\varrho) + q(\varrho)\,\chi_2(\varrho) = 0, \tag{2.16}$$

wobei

$$p(\varrho) = \frac{1}{\varrho} - \delta\frac{K_{,\varrho}}{\delta K - i\alpha} - 2i\lambda\sqrt{h_{22}}, \qquad q(\varrho) = -\frac{1}{\varrho^2}(\delta^2 K^2 + \alpha^2) \le 0.$$

Setzt man dann $\chi_2 := \tilde{f}^{-1}(\chi_1)_{,\varrho}$ bzw. $\chi_1 := \tilde{g}^{-1}(\chi_2)_{,\varrho}$ so erhält man mit jeder Lösung von (2.15) bzw. (2.16) eine Lösung obigen Differentialgleichungssystems für χ, d. h. das Lösen besagten Systems zweier Differentialgleichungen erster Ordung ist dem Lösen der Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.15) oder (2.16) äquivalent. Letztere sind Differentialgleichungen vom Sturm–Liouvilleschen Typ und weiteres Ziel wird es im folgenden sein zu zeigen, daß sie für $\lambda = 0$ und $\alpha \neq 0$ keine beschränkten Lösungen haben können, insbesondere aber zu keinen L^2–integrierbaren Lösungen Ψ der Dirac–Gleichung führen. Hierfür bedienen wir uns folgenden Satzes von Hartman [**11**].

Satz 2.3 (Hartman)**.** *Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $w(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\ddot{w}(x) + p(x)\dot{w}(x) + q(x)w(x) = 0, \qquad x \in I,$$

mit stetigen, komplexwertigen Koeffizienten p und q. Gilt

$$\mathrm{Re}\Big[-q(x) - \frac{1}{4}|p(x)|^2\Big] \ge 0, \tag{2.17}$$

so ist $r(x) = |w(x)|^2$ konkav, i. e. $\ddot{r}(x) \ge 0$.

Man berechnet nun im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,p(\varrho) &= \frac{1}{2}(p+\bar{p}) = \frac{1}{\varrho} - \frac{\delta K_{,\varrho}}{2}\left(\frac{1}{\delta K - i\alpha} + \frac{1}{\delta K + i\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{\varrho} - \frac{\delta^2 K K_{,\varrho}}{\delta^2 K^2 + \alpha^2},\\
\mathrm{Im}\,p(\varrho) &= \frac{1}{2i}(p-\bar{p}) = -\frac{\delta K_{,\varrho}}{2i}\left(\frac{1}{\delta K - i\alpha} - \frac{1}{\delta K + i\alpha}\right) - 2\lambda\sqrt{h_{22}}\\
&= -\frac{\alpha\delta K_{,\varrho}}{\delta^2 K^2 + \alpha^2} - 2\lambda\sqrt{h_{22}}
\end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
-q(\varrho) - \frac{1}{4}|p(\varrho)|^2 = \frac{1}{\varrho^2}\left(\delta^2 K^2 + \alpha^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{\delta^2 K^2(\log K)_{,\varrho}}{\delta^2 K^2 + \alpha^2}\\
\cdot\left(\frac{1}{2\varrho} - \frac{(\log K)_{,\varrho}}{4} - \frac{\alpha\lambda\sqrt{(r^2+1)K}}{\delta K}\right) - \lambda^2(r^2+1)K.
\end{aligned}$$

Aufgrund von

$$\frac{1}{2\varrho} - \frac{(\log K)_{,\varrho}}{4} = \frac{1}{2\varrho}\left(1 - \frac{t^4}{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}\right) > 0$$

wird ersichtlich, daß im Fall $\lambda = 0$ und $\alpha \neq 0$ für die Differentialgleichungen (2.15) und (2.16) die Bedingung (2.17) erfüllt ist, während für $\lambda \neq 0$ der Ausdruck $-q(\varrho) - |p(\varrho)|^2/4$ für $\varrho \to \infty$ asymptotisch gegen $-2\lambda^2(r^2+1)$ geht. Für $\lambda = 0$ und $\alpha = 0$ wird er für $\varrho \to 0$ ebenfalls negativ. Als Konsequenz vorangehenden Satzes erhalten wir somit folgendes Lemma.

Lemma 2.4. *Seien $\lambda = 0$ und $\alpha \neq 0$ sowie χ_1, χ_2 Lösungen der Differentialgleichungen* (2.15) *bzw.* (2.16). *Dann sind $|\chi_1|^2$ und $|\chi_2|^2$ konkav.* □

Wir sind nun in der Lage, den angekündigten Satz zu beweisen.

Satz 2.4. *Sei Γ ein Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung vom Radius r und ψ ein Spinor auf $(M^3_\Gamma \cap M^4, h_t)$ von der Form* (2.13). *Ist ψ eine Lösung der Dirac–Gleichung bezüglich der trivialen Spin–Struktur zum Eigenwert $\lambda = 0$ und $\alpha \neq 0$, so ist $\|\psi\|^2_{\mathrm{L}^2} = \infty$.*

Beweis. Sei $\mathrm{D}\,\psi = 0$ und $\alpha \neq 0$. Nach den vorangehenden Ausführungen genügt $\chi_1 = C\varrho R_1(\varrho)$ der Differentialgleichung (2.15) und wir betrachten deren Fortsetzung

$$\frac{d^2\chi_1}{dz^2}(z) + p(z)\,\frac{d\chi_1}{dz}(z) + q(z)\,\chi_1(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{2.18}$$

ins Komplexe. Für $\alpha \neq 0$ sind $p(z)$ und $q(z)$, $z \in \mathbb{C}$, meromorphe Funktionen mit Polen 1. bzw. 2. Ordnung bei null. Die Differentialgleichung (2.18) ist somit vom Fuchsschen Typ und Null ein regulärer singulärer Punkt. Bilden $\chi_{1,1}$, $\chi_{1,2}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von (2.18), so lassen sie sich in einer Umgebung der Null in die gleichmäßig konvergenten Reihen

$$\chi_{1,1}(z) = z^{\epsilon_1}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\Big), \qquad \chi_{1,2}(z) = z^{\epsilon_2}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n\Big),$$

entwickeln, wobei a_n, b_n Konstanten und ϵ_1, ϵ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\epsilon^2 + (p^0 - 1)\epsilon + q^0 = 0$$

mit

$$q^0 = \lim_{z\to 0} z^2\, q(z), \qquad p^0 = \lim_{z \to 0} z\, p(z)$$

sind, siehe beispielsweise [**24**]. Es ist somit $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 1 - p^0$, $\epsilon_1\epsilon_2 = q^0$ und im vorliegenden Fall berechnet man $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 1 - 1 = 0$, $\epsilon_1\epsilon_2 = -\alpha^2$, also $\epsilon_1 = \alpha$, $\epsilon_2 = -\alpha$. Offenbar gilt eine entsprechende Betrachtung auch für $\chi_2 = C\varrho R_2(\varrho)$. Nun ist

$$\|\psi\|^2_{\mathrm{L}^2} = \int \|\psi(s,\varrho,\varphi)\|^2\, dM^3_\Gamma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi r} \frac{1}{\varrho^2}\big(|\chi_1(\varrho)|^2 + |\chi_2(\varrho)|^2\big)\sqrt{\det h_t}\, ds \wedge d\varrho \wedge d\varphi.$$

Damit obiges Integral beschränkt bleibt, ist es erforderlich, daß $|\chi_1(\varrho)|^2$ und $|\chi_2(\varrho)|^2$ mit der Ordnung > 1 für $\varrho \to \infty$ fallen, da

$$\frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\det h_t} = \frac{\sqrt{8}\varrho(r^2+1)}{\sqrt[4]{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}} \sim \text{konstant};$$

mithin muß $|\chi_i(\varrho)|^2 < 1/\varrho$, $i = 1, 2$, für großes ϱ gelten. Da weiter $|\chi_i(\varrho)|^2$ glatt ist, existiert ein ϱ_0 mit $(|\chi_i(\varrho_0)|^2)_{,\varrho} \leq -1/\varrho_0^2 < 0$. Nach Lemma (2.4) ist $|\chi_i(\varrho)|^2_{,\varrho}$ jedoch monoton wachsend, so daß

$$\frac{d}{d\varrho}|\chi_i(\varrho)|^2 \leq -\frac{1}{\varrho_0^2} < 0 \qquad \text{für alle} \quad \varrho \leq \varrho_0$$

gelten muß. Insgesamt fällt demnach $|\chi_i(\varrho)|^2$ monoton, und streng monoton für $\varrho \leq \varrho_0$. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha = 1, 2, \ldots$. Ist $\chi(\varrho)$ nicht identisch null, so ergibt sich als Konsequenz, daß für die Komponenten χ_1 und χ_2 in einer Umgebung der Null die Darstellungen

$$\chi_i(\varrho) = A_i \varrho^{-\alpha}\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^i \varrho^n\Big]$$

gelten, wobei A_i, c_n^i Konstanten sind; anderenfalls wäre $(|\chi_i(0)|^2)_{,\varrho} \geq 0$. Sei nun ϱ_1 hinreichend klein, so daß χ_1 und χ_2 eine Entwicklung der obigen Form haben und insbesondere

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, c_n^i \varrho^n\Big| < \frac{1}{2} \qquad \text{für alle} \quad \varrho < \varrho_1.$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_1}\int_0^{2\pi r} \|\psi(s,\varrho,\varphi)\|^2 \, dM_\Gamma^3 = 4\pi^2 r \int_0^{\varrho_1} \varrho^{-2(\alpha+1)} \sum_{i=1,2} A_i^2 \Big[\Big(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, c_n^i \varrho^n\Big)^2$$

$$+ \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, c_n^i \varrho^n\Big)^2\Big] \sqrt{\det h_t}\, d\varrho \geq \pi^2 r (A_1^2 + A_2^2) \int_0^{\varrho_1} \varrho^{-2(\alpha+1)} \sqrt{\det h_t}\, d\varrho$$

$$\geq \pi^2 r (A_1^2 + A_2^2) \frac{\sqrt{8}(r^2+1)}{\sqrt[4]{\varrho_1^2 (r^2+1)^2 + t^4}} \int_0^{\varrho_1} \varrho^{-2\alpha+1}\, d\varrho$$

$$= \begin{cases} \log \varrho \Big|_0^{\varrho_1} & = \infty, \quad \alpha = 1, \\ \frac{\varrho^{-2(\alpha-1)}}{-2(\alpha-1)}\Big|_0^{\varrho_1} & = \infty, \quad \alpha = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

und damit $\|\psi\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \infty$. $\square$

Wir untersuchen nun den verbleibenden Fall $\alpha = 0$. Ist $\psi(s,\varrho,\varphi) = e^{i\beta\varphi_\Gamma} R(\varrho)$ ein harmonischer Spinor über $M_\Gamma^3 \cap M^4$, so genügen die Komponenten von $\chi = \varrho\, R(\varrho)$ jeweils den Differentialgleichungen (2.15) bzw. (2.16), wobei

$$p = \frac{1}{\varrho} - (\log K)_{,\varrho}, \qquad q = -f^2 = -g^2 = -\left(\frac{\delta K}{\varrho}\right)^2,$$

d. h. man erhält für χ_1 und χ_2 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\chi_i}{d\varrho^2}(\varrho) + p(\varrho)\frac{d\chi_i}{d\varrho}(\varrho) - f^2(\varrho)\,\chi_i(\varrho) = 0$$

und diese läßt sich explizit integrieren. In der Tat, setzt man

$$\chi_i(\varrho) = B_i e^{\delta\ \mathrm{arsinh}\left(\frac{\varrho^2(r^2+1)}{t^2}\right)} = \frac{B_i}{t^{2\delta}}\Big(\varrho^2(r^2+1) + \sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}\Big)^{\delta},$$

so verifiziert man

$$\frac{d\chi_i}{d\varrho}(\varrho) = \frac{\delta\chi_i(\varrho)}{\varrho^2(r^2+1) + \sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}\left(2\varrho(r^2+1) + \frac{1}{2}\frac{4\varrho^3(r^2+1)^2}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}\right)$$

$$= \frac{2\varrho(r^2+1)\delta}{\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}\chi(\varrho) = f(\varrho)\,\chi(\varrho),$$

$$\frac{d^2\chi_i}{d\varrho^2}(\varrho) = \left(f^2(\varrho) + f\left(-\frac{1}{\varrho} + (\log K)_{,\varrho}\right)\right)\chi_i(\varrho) = \big(f^2(\varrho) - f(\varrho)\,p(\varrho)\big)\,\chi_i(\varrho).$$

Wir setzen ψ auf ganz M^3_Γ fort, indem wir $\psi_{|\Gamma} \equiv 0$ setzen. Sei nun $\dot\varphi_\Gamma = 1/r$ und $\beta = -1, -2, \dots$, so daß $\delta = (r^2+1)\beta/2r \le \beta < 0$. Dann berechnet man

$$\int \|\psi(s,\varrho,\varphi)\|^2 \; dM^3_\Gamma$$
$$= 4\pi^2 r \frac{B_1^2 + B_2^2}{t^{4\delta}} \int \frac{\sqrt{8}\varrho(r^2+1)}{\sqrt[4]{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}} \Big(\varrho^2(r^2+1) + \sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}\Big)^{2\delta} d\varrho < \infty,$$

so daß $\psi \in \mathrm{L}^2(M^3_\Gamma)$. Da jedoch ψ nicht glatt bei $\varrho = 0$ ist, gilt $\psi \notin \mathcal{D}(\overline{\mathrm{D}})$. Damit ist der L^2–Kern des Dirac–Operators für den Fall, daß Γ ein Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung ist, vollständig bestimmt und wir erhalten insgesamt folgenden Satz.

Satz 2.5. *Sei Γ ein verallgemeinerter Kreis in $\mathbb{C}$, welcher durch eine Möbius–Transformation aus einem Kreis in $\mathbb{C}$ um den Nullpunkt hervorgeht, und D der Dirac–Operator auf (M^3_Γ, h_t) bezüglich der trivialen Spin–Struktur. Dann gilt*

$$\mathrm{Ker}_{L^2}(\mathrm{D}_{|(M^3_\Gamma \cap M^4)}) = \bigoplus_{\beta=-1,-2,\dots} \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_\beta, \tag{2.19}$$

während auf M^3_Γ die L^2–Kerne des Dirac–Operators und seines Abschlusses trivial sind. Insbesondere ist $0 \in \sigma^{\mathrm{L}^2}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathrm{D}})$.

Beweis. Sei $\Gamma = re^{i\varphi_\Gamma}$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ um den Ursprung vom Radius r. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\dot\varphi_\Gamma = 1/r$ annehmen. Für $\beta = -1, -2, -3, \dots$ sind nach vorangehenden Betrachtungen

$$\begin{aligned}\psi_\beta(s,\varrho,\varphi) &= \frac{e^{i\beta\varphi_\Gamma}}{\varrho} e^{\delta\ \mathrm{arsinh}\left(\frac{\varrho^2(r^2+1)}{t^2}\right)} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{i\beta\varphi_\Gamma}}{\varrho\, t^{2\delta}} \Big(\varrho^2(r^2+1) + \sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2 + t^4}\Big)^\delta \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

harmonische L^2–Spinoren auf $M^3_\Gamma \cap M^4$, wobei $\delta = (r^2+1)\beta/2r$ ist, B_i Konstanten sind und $\psi_{\beta|\Gamma} \equiv 0$ gelte. Außer der trivialen Darstellung können jedoch nach Satz 2.4 keine weiteren Darstellungen der S^1–Wirkung κ_z im L^2–Kern des Dirac–Operators vorkommen und wir erhalten (2.19) für den Fall, daß $\Gamma = re^{i\varphi_\Gamma}$. Die allgemeine Aussage folgt dann aus der Tatsache, daß M^3_Γ und $M^3_{A\Gamma}$ für $A \in \mathrm{U}(2)$ isometrisch sind. Ist weiter $\psi \in \mathrm{L}^2(\Sigma)$ ein harmonischer Spinor bezüglich D, so folgt nach dem Regularitätssatz für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, daß $\psi \in \Gamma(\Sigma)$. Da jedoch sämtliche L^2–harmonischen Spinoren Linearkombinationen der ψ_β sein müssen, letztere jedoch nicht regulär bei $\varrho = 0$ sind, folgt, daß auf M^3_Γ die L^2–Kerne des Dirac–Operators und seines Abschlusses trivial sind. Da nach Satz 2.2 Null im Spektrum von $\overline{\mathrm{D}}$ liegt, folgt $0 \in \sigma^{\mathrm{L}^2}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathrm{D}})$. □

4. Das Spektrum des Laplace–Operators

In diesem Abschnitt werden wir die in Abschnitt 1 begonnenen Untersuchungen zum Laplace–Operator auf den Hyperflächen M^3_Γ fortsetzen. Im Gegensatz zum Dirac–Operator steht das Spektrum des Laplace–Operators auf einer offenen vollständigen Mannigfaltigkeit zu den zugrundeliegenden geometrischen Größen in einer viel näheren Beziehung. So implizieren untere Schranken für den Ricci–Tensor obere Schranken für den kleinsten Spektralwert besagten Operators, und mittels des Studiums des geodätischen Flusses und des exponentiellen Wachstums der Mannigfaltigkeit ist es möglich, Aussagen über das Infimum des wesentlichen Spektrums des Laplace–Operators zu erhalten und umgekehrt.

Auf Funktionen wirkend stimmen der Hodge–Laplace–Operator und der Bochner–Laplace–Operator überein, und auf den Hyperflächen M^3_Γ gilt $\Delta = \nabla^*\nabla : \mathrm{C}^\infty(M^3_\Gamma) \to \mathrm{C}^\infty(M^3_\Gamma)$; da weiter M^3_Γ für eine geschlossene Kurve Γ vollständig ist, ist Δ wesentlich selbstadjungiert als ein Operator in $\mathrm{L}^2(M^3_\Gamma)$ mit Definitionsbereich $\mathrm{C}^\infty_0(M^3_\Gamma)$, während der Definitionsbereich von $\overline{\Delta}$ durch den Sobolev–Raum ${}^2\Omega^0(M^3_\Gamma) = \mathrm{H}^2(M^3_\Gamma)$ gegeben ist. Weiter ist $\sigma(\Delta) = \sigma(\overline{\Delta}) = \sigma_{\text{ess}}(\overline{\mathrm{D}}) \,\dot{\cup}\, \sigma_{\text{discr}}(\overline{\mathrm{D}})$. Für den kleinsten Spektralwert des Laplace–Operators gilt nun allgemein folgende Proposition (siehe bspw. [**5**]).

Proposition 2.7. *Sei (M^n, g) eine offene vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sind die Komponenten des Ricci–Tensors von unten durch $-(n-1)C$ beschränkt, wobei $C \geq 0$, so genügt der kleinste Spektralwert $\mu_0(M^n)$ des Laplace–Operators der Ungleichung*

$$\mu_0(M^n) \leq \frac{(n-1)^2}{4} C.$$

Als eine unmittelbare Folgerung erhalten wir folgende Aussage.

Korollar 2.2. *Sei Γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$. Dann genügt der kleinste Spektralwert des Laplace–Operators auf der Hyperfläche $(M^3_{A\Gamma}, h_t)$, $A \in \mathrm{U}(2)$, der Ungleichung $\mu_0(M^3_{A\Gamma}) \leq t^{-2}$, wobei $t \neq 0$.*

Beweis. Nach Theorem 1.1 ist $R_{11} \geq R_{22} \geq R_{33}$. Da weiter R_{33} strikt monoton wachsend ist, gilt $\inf_\varrho R_{33} = R_{33|\varrho=0} = -2/t^2$, so daß $R_{ij} \geq -2C$, wobei $C = t^{-2}$. Die Behauptung folgt dann mittels obiger Proposition. □

Im folgenden werden wir Abschätzungen für das Infimum des Spektrums von $\overline{\Delta}$ auf den betrachteten Hyperflächen zu bestimmen suchen und zeigen, daß es für jede beliebige geschlossene Kurve Γ beliebig nahe an null heranreicht, wobei wir abermals von dem min–max–Prinzip Gebrauch machen werden. Demnach ist $\mu_0(M^3_\Gamma) = 0$ für $A \in \mathrm{U}(2)$. Da nach Korollar 2.1 Null kein L^2–Eigenwert sein kann, stellt obige Abschätzung auch eine Abschätzung für das wesentliche Spektrum dar. Damit sind wir in der Lage, das exponentielle Wachstum von M^3_Γ für beliebige geschlossene Kurve zu berechnen und so die Ergebnisse in Abschnitt 4 von Teil 1 zu verallgemeinern, da, wie bereits bemerkt, das Infimum des wesentlichen Spektrums des Laplace–Operators unmittelbar mit dem exponentiellen Wachstum der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit in Verbindung steht. Genauer gilt folgender Satz von Brooks [**3**].

Satz 2.6 (Brooks). *Sei (M^n, g) eine offene, vollständige Mannigfaltigkeit unendlichen Volumens. Dann gilt*

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(\overline{\Delta}) = \frac{1}{4}\mu_\infty^2.$$

Demzufolge muß das exponentielle Wachstum der Hyperflächen M^3_Γ für jede beliebige geschlossene Kurve Γ null sein. Wir gehen nun dazu über, diese Behauptungen zu beweisen.

Hierzu bemerken wir zuerst, daß für $\varphi \in \mathrm{H}^2(M^3_\Gamma)$

$$\int (\varphi, \Delta\varphi) dM^3_\Gamma = \int (\nabla\varphi, \nabla\varphi) dM^3_\Gamma$$

gilt, wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt in $\mathrm{C}^\infty(M^3_\Gamma)$ bezeichnet und

$$(\nabla\varphi, \nabla\varphi) := \sum (\nabla_{Y_i}\varphi, \nabla_{Y_i}\varphi) = \sum Y_i^2(\varphi) = |\operatorname{grad}\varphi|^2.$$

Vermöge des min–max–Prinzips gilt

$$\inf \sigma(\overline{\Delta}) = \inf_{0\neq f\in\mathcal{D}(\overline{\Delta})} \frac{\int |\operatorname{grad} f|^2 dM^3_\Gamma}{\int |f|^2 dM^3_\Gamma}, \tag{2.20}$$

und wir betrachten die Funktion

$$\mathfrak{H}_\epsilon := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}}, \qquad \epsilon > 0,$$

die eine Modifikation der Spur $\mathfrak{H}$ der zweiten Fundamentalform darstellt; sie wird es uns gestatten, Abschätzungen für $\sigma_{\text{ess}}(\overline{\Delta})$ zu erzeugen.

Satz 2.7. *Sei Γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ und $\overline{\Delta}$ der Abschluß des skalaren Laplace–Operators auf $(M^3_{A\Gamma}, h_t)$, $A \in \mathrm{U}(2)$. Dann gilt für beliebiges $\delta > 0$*

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(\overline{\Delta}) < \delta.$$

Beweis. Nach Korollar 1.3, ist $\mathfrak{H}^\alpha$ L^2–integrabel über M^3_Γ für $\alpha > 3/2$. Man berechnet

$$Y_1(\mathfrak{H}^\alpha_\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\frac{\partial}{\partial\,\varrho}\left(\frac{2}{\sqrt{\varrho^2(r^2+1)^2+\epsilon^4}}\right)^{\alpha/2} = -\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\frac{\alpha\varrho^3(r^2+1)^2}{\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4}\mathfrak{H}^\alpha_\epsilon,$$

und erhält somit, da die Ableitungen $Y_2(\mathfrak{H}^\alpha_\epsilon)$ und $Y_3(\mathfrak{H}^\alpha_\epsilon)$ null sind, für die Länge des Gradienten von $\mathfrak{H}^\alpha_\epsilon$

$$|\operatorname{grad}\mathfrak{H}^\alpha_\epsilon|^2 = Y_1^2(\mathfrak{H}^\alpha_\epsilon) = \frac{\alpha^2\varrho^4(r^2+1)^2}{2(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^2}\sqrt{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}\,\mathfrak{H}^{2\alpha}_\epsilon.$$

Für $\alpha = 2$, und unter der Annahme, daß $t \leq \epsilon$, impliziert die Monotonie des Integrals

$$\begin{aligned}
\int \mathfrak{H}^4_\epsilon dM^3_\Gamma &= 8\sqrt{8}\pi\int_0^\infty\int_0^L \frac{\varrho^3(r^2+1)}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)\sqrt[4]{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}}\,ds\wedge d\varrho \\
&\geq 8\sqrt{8}\pi\int_0^\infty\int_0^L \frac{\varrho^3(r^2+1)}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{5/4}}\,ds\wedge d\varrho \\
&= 8\sqrt{8}\pi\int_0^L\left[-\frac{1}{(1+r^2)(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{1/4}}\right]_0^\infty ds = \frac{8\sqrt{8}\pi}{\epsilon}\int_0^L\frac{1}{r^2+1}\,ds.
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise berechnet man, abermals für $t \leq \epsilon$,

$$\begin{aligned}
\int |\operatorname{grad}\mathfrak{H}^2_\epsilon|^2 dM^3_\Gamma &= 16\sqrt{8}\pi\int_0^\infty\int_0^L \frac{\varrho^7(r^2+1)^3}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^3}\sqrt[4]{\varrho^4(r^2+1)^2+t^4}\,ds\wedge d\varrho \\
&\leq 16\sqrt{8}\pi\int_0^\infty\int_0^L \frac{\varrho^7(r^2+1)^3}{(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{11/4}}\,ds\wedge d\varrho \\
&= 16\sqrt{8}\pi\int_0^L\left(\left[-\frac{7\varrho^4(r^2+1)^2+4\epsilon^4}{21(\varrho^4(r^2+1)^2+\epsilon^4)^{7/4}(r^2+1)}\right]_0^\infty\right) ds = \frac{64\sqrt{8}\pi}{21\epsilon^3}\int_0^L\frac{1}{(r^2+1)}\,ds,
\end{aligned}$$

woraus folgt, daß $\mathfrak{H}_\epsilon^2 \in \mathcal{D}(\overline{\Delta})$. Zusammenfassend erhalten wir

$$\frac{\int |\operatorname{grad} \mathfrak{H}_\epsilon^2|^2 dM_\Gamma^3}{\int \mathfrak{H}_\epsilon^4 dM_\Gamma^3} \leq \frac{8}{21\epsilon^2} \qquad \text{for all} \quad 0 < t < \epsilon,$$

und die Behauptung folgt mittels Gleichung (2.20), da nach Korollar 2.1 Null kein L^2–Eigenwert von Δ und demnach von $\overline{\Delta}$ sein kann. □

Korollar 2.3. *Seien $t > 0$ und $A \in \mathrm{U}(2)$ beliebig. Für jede beliebige geschlossene Kurve Γ in $\mathbb{C}$ hat $(M_{A\Gamma}^3, h_t)$ subexponentielles Wachstum.*

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz der Sätze 2.6 und 2.7. □

Literaturverzeichnis

[1] N. Aronszajn, *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl. **36** (1957), 235–249.

[2] H. Baum, T. Friedrich, R. Grunewald, and I. Kath, *Twistor and Killing spinors on Riemannian manifolds*, Teubner Verlag, 1991.

[3] R. Brooks, *A relation between growth and the spectrum of the Laplacian*, Math. Zeitschr. **178** (1981), 501–508.

[4] T. Eguchi and A.J. Hanson, *Asymptotically flat solutions to euclidean gravity*, Phys. Lett. **74B** (1978), 249–251.

[5] J. Eichhorn, *Elliptic differential operators on noncompact manifolds*, Seminar Analysis of the Karl–Weierstrass–Institute 1986/1987, Teubner–Texte zur Mathematik, vol. 106, Teubner Verlag, Leipzig, 1988, pp. 4–169.

[6] T. Friedrich, *Dirac–Operatoren in der Riemannschen Geometrie*, Vieweg–Verlag, Braunschweig, 1997.

[7] ———, *On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3–space*, Journ. Geom. Phys. **28** (1998), 143–157.

[8] T. Friedrich and E.C. Kim, *The Einstein–Dirac equation on Riemannian spin manifolds*, Journ. Geom. Phys. **33** (2000), 128–172.

[9] ———, *Some remarks on the Hijazi inequality and generalizations of the Killing equation for spinors*, math.DG/9906168, to appear in Journ. Geom. Phys., 2000.

[10] R.E. Greene and H. Wu, *Integrals of subharmonic functions on manifolds of nonnegative curvature*, Inv. math. **27** (1974), 265–298.

[11] Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley, New York, 1964.

[12] N. J. Hitchin, *Polygons and gravitons*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **85** (1979), 4465–476.

[13] D. D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[14] S. Kobayashi and N. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. II, John Wiley & Sons, INC., New York, 1969.

[15] E. Kreysig, *Differentialgeometrie*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1968.

[16] P.B. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as hyperkähler quotients*, J. Diff. Geom. **29** (1989), 565–683.

[17] ———, *A Torelli-type theorem for gravitational instantons*, J. Diff. Geom. **29** (1989), 685–697.

[18] C. LeBrun, *Counterexamples to the generalized positive action conjecture*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), 591–596.

[19] J. W. Milnor and J.D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematical Studies, vol. 76, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[20] U. Pinkall, *Hopf tori in S^3*, Invent. Math. **81** (1985), 379–386.

[21] R.S. Schoen and S.T Yau, *Proof of the positive action conjecture in quantum gravity*, Phys. Rev. Lett. **42** (1979), 547–548.

[22] B. Simon and M. Reed, *Methods of modern mathematical physics*, vol. IV, Academic Press, INC., San Diego, 1978.

[23] R. O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds*, Springer–Verlag, Berlin, 1986.

[24] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[25] T. Willmore, *Riemannian geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1993.

Lebenslauf

30. Juli 1972	geboren in Freiburg im Breisgau als Sohn von Maria Rosario Zavala Esteves und Prof. Dr. Ulrich Ramacher
1979–1982	Besuch der Grundschule, Ostfildern
1982–1990	Besuch der Primar– und Sekundarstufe der Deutschen Schule Villa Ballester, Buenos Aires
1991	Besuch der Abitur–Klasse der Goethe–Schule, Buenos Aires
8. November 1991	Erlangung der Allgemeinen Deutschen Hochschulreife
1992	Studium der Philosophie, Komparatistik und Politologie an der Ludwig–Maximilians–Universität München
1992–1999	Studium der Mathematik und der Physik, zunächst an der Eberhard–Karls–Universität Tübingen, dann an der Freien Universität und Humboldt–Universität Berlin
22. März 1999	Abschluß des Studiums im Studiengang Physik–Diplom an der Freien Universität Berlin
	Thema der Diplomarbeit: *Lokalisierung in der Wignerschen Theorie der elementaren Systeme*
Seit 1. Juni 1999	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Sonderforschungsbereich 288 der DFG an der Humboldt–Universität Berlin