Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2014**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

Übungen zu Dynamische Systeme
5. Aufgabenblatt

Aufgabe 15 *(Invariante Mengen)* (6)
Sei $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein dynamisches System und $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeige:

(i) M ist genau dann positiv invariant, wenn $M^c := \mathbb{R}^n \setminus M$ negativ invariant ist.

(ii) Wenn M positiv invariant ist, so sind auch $\bar{M}$ und $\mathring{M}$ positiv invariant.

(iii) Sei M abgeschlossen. Dann ist M genau dann positiv invariant, wenn für jedes $x \in \partial M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $\varphi(t; x) \in M$ für alle $t \in [0, \varepsilon]$.

Aufgabe 16 *(Bestimmung invarianter Mannigfaltigkeiten)* (4)
Wir betrachten das nicht-lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{4}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(y_1 y_2 - y_1 + y_2) - 1 \\ y_2' &= \frac{1}{4}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(y_1 y_2 + y_1 - y_2) - 1. \end{aligned}$$

Das System besitzt einen Sattelpunkt in $\hat{y} = (1,1)^\top$. Bestimme die invarianten Mannigfaltigkeiten $W_s(\hat{y})$ und $W_u(\hat{y})$ und skizziere diese. Verwende dazu den Fluss des Systems, welcher mit den Abkürzungen $\alpha(x) := \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\beta(x) := \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, $\gamma(x) := \operatorname{artanh}(\alpha(x))$ und $\delta(x) := \operatorname{arcoth}(\alpha(x))$ explizit gegeben ist durch

$$\varphi(t; x) = \begin{cases} \varphi_1(t; x) := (1 + \beta(x)e^{-t}, 1 - \beta(x)e^{-t})^\top & , \alpha(x) = 1, \\ \varphi_2(t; x) := (-1 + \beta(x)e^{-t}, -1 - \beta(x)e^{-t})^\top & , \alpha(x) = -1, \\ \varphi_3(t; x) := (\tanh(\gamma(x) - t) + \beta(x)e^{-t}, \tanh(\gamma(x) - t) - \beta(x)e^{-t})^\top & , \alpha(x) \in (-1, 1), \\ \varphi_4(t; x) := (\coth(\delta(x) - t) + \beta(x)e^{-t}, \coth(\delta(x) - t) - \beta(x)e^{-t})^\top & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 17 *(Die ω-Limesmenge)* (4)

Sei $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein dynamisches System und $x \in \mathbb{R}^n$. Beweise, dass für die ω-Limesmenge $\omega(x)$ gilt:

(i) Es ist
$$\omega(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\{\varphi(s; x) : \ s \geq t\}}.$$

(ii) Ist der Halborbit $\mathcal{B}^+(x)$ beschränkt, so ist $\omega(x)$ nicht-leer und kompakt.

Abgabe: 08.07.2014, vor der Vorlesung.

Klausurtermin: Sa, 12.07.2014, 10:00-11:50, HS IV (Lahnberge)