Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2015/16**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. B. Küster

Übungen zur Linearen Optimierung
11. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Prüfen Sie, ob der Punkt $x^{\mathsf{T}} = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -2)$ eine Optimallösung des Linearen Programms (LP1) ist mit den Daten (4)

$$c^{\mathsf{T}} = (1, -1, 2), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 Verwendet man für die Approximation von Messdaten r_i in Zeitpunkten $t_i, i = 1, \ldots, m$, einen Funktionsansatz $f(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j(t)$, $n < m$, bekommt man ein überbestimmtes Gleichungssystem $Ax = r$ mit $a_{ij} = p_j(t_i)$. Für $\text{Rang}(A) = n$ kann man eine Näherungslösung durch Minimierung des Residuums $\|Ax - r\|_p$ bestimmen. Mit der Euklidnorm ($p = 2$) erhält man die *Methode der kleinsten Quadrate*. Bei Verwendung der Summennorm ($p = 1$) ist die Näherung aber robuster gegen "Ausreißer". Das Optimierungsproblem lautet hier (3)

$$\min \sum_{i=1}^{m} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - r_i \Big|.$$

a) Geben Sie die zu diesem Problem gehörige Standardform (LP1) an.

b) Zeigen Sie, dass das duale Programm zu folgendem Problem umgeschrieben werden kann:

$$\min r^{\mathsf{T}} y : \quad A^{\mathsf{T}} y = 0, \ y^+ + y^- = \mathbb{1},$$

wobei die letzte Gleichung komponentenweise zu verstehen ist, und $y = y^+ - y^-$ mit $y^+, y^- \geq 0$.

Aufgabe 3 Mit $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ b \in \mathbb{R}^m, \ c, u, v \in \mathbb{R}^n$ wird das Programm (4)

$$\begin{array}{rcl} \max \ c^{\mathsf{T}} x & & \\ Ax & = & b \\ u \leq & x & \leq v \end{array}$$

betrachtet. Zeigen Sie, dass ein zulässiges $\hat{x}$ genau dann optimal ist, wenn ein $y \in \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, n\} : \quad \begin{cases} y^{\mathsf{T}} a_j < c_j & \Rightarrow \quad \hat{x}_j = v_j, \\ y^{\mathsf{T}} a_j > c_j & \Rightarrow \quad \hat{x}_j = u_j. \end{cases}$$

Abgabe: Donnerstag, 21.01.16, vor der Vorlesung.