Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. B. Schmitt

Wintersemester 2015/16

# Probeklausur zur Linearen Optimierung

Entspricht im Wesentlichen der Abschlussklausur im WS 2014/15.
Unsere Klausur wird am Di, 9.2. von 10:00-11:55 Uhr im Hörsaal 00/70 stattfinden.

### Aufgabe 1 (1 Bonuspunkt, in Klausur 4 Punkte)

Geben Sie kurze Lösungen zu den folgenden Aufgaben/Fragen an.

(i) Welches Verfahren kann verwendet werden, um bei einem Linearen Programm der Form (LP2) mit negativer rechter Seite $b \leqslant 0$ die Anlaufrechnung einzusparen?

(ii) Zu einem Linearen Programm der Form (LP3) werde eine Anlaufrechnung mittels der Zwei-Phasen-Methode durchgeführt. Was bedeutet es, wenn nach Abschluss von Phase Eins in der Optimallösung des Hilfsproblems nicht alle künstlichen Schlupfvariablen den Wert Null annehmen?

(iii) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe Menge und es sei $z \in M$ so gewählt, dass $M \setminus \{z\}$ konvex ist. Was gilt dann für $z$?

(iv) Es werde ein Lineares Programm (LP) und das dazu duale Programm (LP$*$) betrachtet. Das duale Programm (LP$*$) sei unbeschränkt. Was folgt daraus für das primale Programm?

### Aufgabe 2 (1 Bonuspunkt, in Klausur 4 Punkte)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleerer konvexer Kegel. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{aff}(K) = K - K$$

gilt, wobei $M - N := \{x - y : x \in M, y \in N\}$ für Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ ist.

### Aufgabe 3 (1 Bonuspunkt, in Klausur 4 Punkte)

Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$C := \bigcup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} (\alpha M \cap (1 - \alpha) N)$$

konvex ist.
*Hinweis:* Für eine konvexe Menge $M$ und positive Skalare $\lambda, \mu \geqslant 0$ gilt $\lambda M + \mu M = (\lambda + \mu) M$.

**Aufgabe 4 (1 Bonuspunkt, in Klausur 4 Punkte)**

Es seien die Vektoren $b, c, d, v \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeigen Sie mit dem Lemma von Farkas, dass die Aussage

$$\forall y \in \mathbb{R}^3: \quad \left.\begin{array}{r} b_1y_1 + b_2y_2 + y_3 \leqslant 0 \\ c_1y_1 + c_2y_2 + y_3 \leqslant 0 \\ d_1y_1 + d_2y_2 + y_3 \leqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1v_1 + y_2v_2 + y_3 \leqslant 0$$

genau dann gilt, wenn $v$ in dem von den drei Vektoren $b$, $c$ und $d$ aufgespannten Dreieck liegt, d.h., wenn gilt: $v \in \operatorname{konv}\{b, c, d\}$.

**Aufgabe 5 (1 Bonuspunkt, in Klausur 2+3=5 Punkte)**

Betrachten Sie das (LP2)-Problem $\min\{c^\mathsf{T} x : Ax \geqslant b, x \geqslant 0\}$ mit

$$c = \begin{pmatrix} -11 \\ 10 \\ 34 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass der Vektor $\bar{x} = (4, 1, 1)^\mathsf{T}$ eine Ecke des zulässigen Bereichs $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geqslant b, x \geqslant 0\}$ ist.

(ii) Benutzen Sie den Komplementaritätssatz, um zu überprüfen, ob $\bar{x}$ eine Optimallösung des linearen Programms ist.

**Aufgabe 6 (1 Bonuspunkt, in Klausur 6 Punkte)**

Es sei das Lineare Programm

$$\begin{aligned} \min -2x_1 + \frac{9}{4}x_2 & \\ -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\geqslant -1 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\geqslant 2 \\ -x_1 + \frac{3}{2}x_2 &\geqslant \frac{3}{4} \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Optimallösung des Linearen Programms mit dem Simplex-Tableau-Verfahren. Benutzen Sie dabei zur Anlaufrechnung die Groß-M-Methode. Die Konstante $M$ braucht hierbei nicht explizit gewählt, sie muss nur als groß genug angenommen werden.
Sie sollten bei der Auswahl der Pivotspalten immer den kleinsten geeigneten Index wählen!

**Aufgabe 7 (1 Bonuspunkt, in Klausur 2+4=6 Punkte)**

Es sei das (LP3)-Problem $\min\{c^\mathsf{T}x : Ax = b, x \geqslant 0\}$ mit

$$c = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}, \ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dieses hat die Optimallösung $\hat{x} = (\frac{5}{6}, \frac{25}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0)^\mathsf{T}$ mit der zugehörigen Basis $A_J$, $J = \{1, 2, 4\}$. Es wird nun eine parametrische Änderung der rechten Seite durch den Vektor $\tilde{b} = (15, 7, 7)^\mathsf{T}$ vorgenommen, d.h. es wird das Programm $\min\{c^\mathsf{T}x : Ax = b(t), x \geqslant 0\}$, $t \geqslant 0$ mit $b(t) = b + t\tilde{b}$ betrachtet.

(i) Bestimmen Sie den maximalen Parameter $t_{\max} > 0$, so dass die Basis $A_J$ für alle $t \in [0, t_{\max}]$ optimal ist.

(ii) Es sei nun $t = 1$ gewählt. Bestimmen Sie, ausgehend von der Basis $A_J$, die Optimallösung des geänderten Problems mittels des dualen Simplex-Verfahrens.

*Hinweis:* Eine Auflistung der Inversen aller möglichen $3 \times 3$-Untermatrizen der Matrix $A$ befindet sich am Ende der Klausur.

**Inversen aller $3 \times 3$-Untermatrizen der Matrix $A$ aus Aufgabe 7**

$J_1 = \{1,2,3\}$ $\qquad$ $J_2 = \{1,2,4\}$

$$A_{J_1}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{11}{56} & -\frac{1}{28} \\ \frac{1}{8} & \frac{13}{56} & \frac{9}{28} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{56} & -\frac{3}{28} \end{pmatrix} \qquad A_{J_2}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{42} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{42} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$J_3 = \{1,2,5\}$ $\qquad$ $J_4 = \{1,3,4\}$

$$A_{J_3}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad A_{J_4}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{14} & \frac{6}{7} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{13}{14} & -\frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

$J_5 = \{1,3,5\}$ $\qquad$ $J_6 = \{1,4,5\}$

$$A_{J_5} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{88} & \frac{21}{88} & \frac{1}{44} \\ \frac{5}{44} & \frac{3}{44} & -\frac{3}{22} \\ \frac{7}{88} & \frac{13}{88} & \frac{9}{44} \end{pmatrix} \qquad A_{J_6}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{68} & \frac{15}{68} & \frac{1}{17} \\ \frac{5}{34} & \frac{3}{34} & -\frac{3}{17} \\ \frac{7}{68} & \frac{11}{68} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

$J_7 = \{2,3,4\}$ $\qquad$ $J_8 = \{2,3,5\}$

$$A_{J_7}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{11}{14} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \qquad A_{J_8}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{16} & \frac{21}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \\ \frac{7}{16} & -\frac{11}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$J_9 = \{2,4,5\}$ $\qquad$ $J_{10} = \{3,4,5\}$

$$A_{J_9}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{14} & \frac{15}{14} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{J_{10}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$