Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2015**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

1. Aufgabenblatt zur Mathematik II

Aufgabe 1 *(Mengen und Abbildungen)* (4)
Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $B \subset N$. Zeige, dass

$$f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Beweise, dass sogar Gleichheit $f(f^{-1}(B)) = B$ gilt, wenn f surjektiv ist. Stimmt diese Aussage auch noch, wenn f nicht surjektiv ist?

Aufgabe 2 *(Injektiv, surjektiv, bijektiv)* (4)
Untersuche, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv sind. Gib im Falle einer bijektiven Abbildung die Umkehrabbildung an.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2, y)$,

(ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x - 1$,

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 1$.

Aufgabe 3 *(Äquivalenzrelationen und -klassen)* (6)

(i) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge $M \neq \emptyset$ und $[\cdot]$ die zugehörigen Äquivalenzklassen. Zeige, dass für $a, b \in M$ gilt: Entweder ist $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$.

(ii) Ist durch
$$a \sim b :\Leftrightarrow a - b \text{ gerade}$$
eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen gegeben?

Aufgabe 4 *(Rechenregeln in Körpern)* (3)
Es sei K ein Körper, $a, b \in K$ und $k \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass $a^k b^k = (ab)^k$ gilt.

Hinweise:

- Zettelabgabe stets freitags **vor** der Vorlesung.
- Abgabe in festen Zweiergruppen ist erlaubt.
- Zulassungsvoraussetzungen zur Klausur:
  50% der Übungspunkte, Mitarbeit im Tutorium (Mindestens einmal vorrechnen).

Abgabe: Freitag, 24.04.15, vor der Vorlesung.