Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2015**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

1. Aufgabenblatt zur Mathematik II

Aufgabe 5 *(Binomialkoeffizienten)* (3)
Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}.$$

Aufgabe 6 *(Produktformeln)* (3)
Sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + q^{(2^k)}\right) = \frac{q^{(2^n)} - 1}{q-1} = \sum_{k=0}^{2^n-1} q^k.$$

Aufgabe 7 *(Die Mengen $\mathbb{Z}_p$)* (4)
Wir haben in der Vorlesung die Körper $\mathbb{Z}_p, p = 2, 3$ kennengelernt. Die Addition $+_p$ und Multiplikation $\cdot_p$ in $\mathbb{Z}_p$ lässt sich kurz schreiben als

$$a +_p b := (a+b) \mod p, \quad a \cdot_p b := (a \cdot b) \mod p,$$

wobei $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition und Mulitplikation bezeichnen und $\mod$ den Rest bei ganzzahliger Divison. Beispielweise ist $17 \mod 4 = 1$, $10 \mod 2 = 0$ und so weiter. Stelle die Additions- und Multiplikationstafeln auch für $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_5$ auf. Begründe kurz anhand der Ergebnisse, ob es sich bei diesen Mengen um Körper handelt.

Aufgabe 8 *(Anordnung der reellen Zahlen)* (4)
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeige die folgenden Rechenregeln und gib dabei jeweils an, welche Eigenschaften der reellen Zahlen benutzt werden.

(i) $a < b,\ 0 < c \Rightarrow ac < bc$,

(ii) $0 < a < b,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < a^n < b^n$.

Bitte wenden!

Aufgabe 9 *(Minima, Maxima, Infima und Suprema)* (6)

(i) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $A + B := \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$. Zeige: Falls A und B nicht-leer und beschränkt sind, so gilt $\inf A + B = \inf A + \inf B$.

(ii) Untersuche ob für folgende Mengen Minima, Maxima, Infima und Suprema existieren und bestimme diese gegebenenfalls:

$$M_1 := \{1 + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}, \quad M_2 := \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Abgabe: Wegen des Feiertags erst Freitag, 08.05.15, vor der Vorlesung.