Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2015**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

5. Aufgabenblatt zur Mathematik II

Aufgabe 18 *(Kontraktive Folgen)* (3)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge, sodass ein $0 \leq q < 1$ existiert mit

$$|a_n - a_m| \leq q|a_{n-1} - a_{m-1}|, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 19 *(Reihen mit alternierender Nullfolge)* (4)
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge mit $a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert. Hinweis: Zeige zunächst, dass für $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ die Teilfolgen s_{2n} und s_{2n+1} monoton und beschränkt sind.

Aufgabe 20 *(Konvergenz von Reihen)* (8)
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k-1)^k}$

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

(v) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$

Aufgabe 21 *(Nullfolgen und konvergente Reihen)* (4*)
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $a_0 > 0$ und

$$a_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^{-1}, \quad n > 0.$$

Zeige dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert, obwohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge ist.

Die mit einem * markierten Punktzahlen sind Bonuspunkte.
Abgabe: Freitag, 29.05.15, vor der Vorlesung.