Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2015**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. B. Schmitt, D. Lellek

8. Aufgabenblatt zur Mathematik II

Aufgabe 30 *(Fixpunkt-Existenz)* (4)
Fixpunkte einer Selbstabbildung $f : D \to D$ haben eine große praktische Bedeutung, da die Iterationsverfahren aus Beisp. 2.1.3 und Satz 2.1.21 gerade solche Punkte $z \in D$ mit der Eigenschaft $z = f(z)$ berechnen. Zeige dazu, dass eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f\big([0,1]\big) \subseteq [0,1]$ einen Fixpunkt $z = f(z) \in [0,1]$ besitzt.

Aufgabe 31 *(Positivität)* (3)
Die stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei positiv auf dem kompakten Intervall $[a,b]$, also $f(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$. Zeige, dass dann ein $q > 0$ existiert so, dass $f(x) \geq q > 0\, \forall x \in [a,b]$.

Aufgabe 32 *(Gleichmäßige Stetigkeit)* (5)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf dem offenen und beschränkten Intervall $D := (a,b) \neq \emptyset$, $a,b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $f(D)$ dann beschränkt ist.

Aufgabe 33 *(Grenzwerte und Logarithmus)* (4)
a) Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}$.
b) Beweise für $x, y > 0$ die Ungleichung

$$\frac{\ln(x) + \ln(y)}{2} \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Hinweis: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.

Abgabe: Freitag, 19.06.15, vor der Vorlesung.
Anmeldung zur Modulprüfung endet am 19. Juni 2015!