Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, A. Görlich

Übungen zur Vorlesung Numerische Basisverfahren
10. Aufgabenblatt

Aufgabe 37 (4)

Matrix- und Vektorungleichungen sind in dieser Aufgabe elementweise zu verstehen. Zu einem Gleichungssystem $Ax = b$ mit diagonaldominanter Matrix A werden Gesamt- und Einzelschrittverfahren betrachtet, die Iterationsmatrizen sind B_G bzw. B_E. Der Iterationsschritt lautet für beide Verfahren formal $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + r, k \geq 0$. Zeigen Sie unter der Voraussetzung

$$B_G \geq 0, \quad D^{-1}b \geq 0:$$

i) Es gilt $B_E \geq 0$.

ii) Ist $x^{(0)}$ ein Startvektor mit $x^{(0)} \leq x^{(1)}$ (bzw. $x^{(0)} \geq x^{(1)}$), so ist für beide Verfahren die Iterationsfolge $\{x^{(k)}\}$ monoton wachsend (bzw. fallend), d.h. $x^{(0)} \leq x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \ldots$ (bzw. $x^{(0)} \geq x^{(1)} \geq x^{(2)} \geq \ldots$).

iii) Mit dem Startwert $x^{(0)} = 0$ wird die Lösung z von unten approximiert, mit $\mathbb{1} := (1, \ldots, 1)^T$ gilt für beide Verfahren jeweils mit $q := \|B\|_\infty$ die Schranke

$$x^{(k)} \leq z \leq x^{(k)} + \frac{q}{1-q} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|_\infty \cdot \mathbb{1}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Aufgabe 38 (3)

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Geben Sie die Iterationsmatrix $B(\omega) = (1-\omega)I + \omega B_G$ zu der Iteration an, die man durch zusätzliche Relaxation beim Gesamtschrittverfahren erhält.

ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $B(\omega)$ und den optimalen Relaxationsparameter $\hat{\omega}$, der $\rho(B(\omega))$ minimiert. Welchen Wert hat $\rho(B(\hat{\omega}))$?

Aufgabe 39 (2)

Mit regulärer Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $z, b \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$, werde das überbestimmte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} M \\ z^\top \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}$$

betrachtet. Zeigen Sie, dass mit $y^\top := z^\top M^{-1}$ die kleinste-Quadrate-Lösung $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dieses Systems gegeben ist durch die Lösung des regulären Problems

$$Mx = b + \frac{\beta - y^\top b}{1 + \|y\|_2^2} y.$$

Aufgabe 40 (3)

Wenn die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, vollen Rang n besitzt, hat die Kleinste-Quadrate-Lösung x^+ zum System $Ax = b$ auch die Darstellung $x^+ = A^+ b$ mit $A^+ = (A^\top A)^{-1} A^\top$.

i) Beweisen Sie für diese *Pseudoinverse* die vier Eigenschaften

$$(AA^+)^\top = AA^+, \; (A^+A)^\top = A^+A, \quad AA^+A = A, \; A^+AA^+ = A^+.$$

ii) Zeigen Sie, dass $P = A(A^\top A)^{-1} A^\top$ der Orthogonalprojektor auf $R(A)$ ist.

Aufgabe 41 (ACHTUNG: Abgabe schon am 05.07.2017) (5)

Die praktische Durchführung des Einzelschrittverfahrens ist sehr einfach, da die einzelne Komponente $x_i^{(k)}$ des letzten Iterationsvektors sofort durch den neuen Wert $x_i^{(k+1)}$ überschrieben werden kann. Die Anweisung für einen Schritt beim System $Ax = b$ lautet daher

$$x_i := \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j \Big), \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Im Unterschied zum Gesamtschrittverfahren hängt daher aber das Ergebnis auch von der Nummerierung bzw. der Reihenfolge beim Indexdurchlauf $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ab, die in der Vorlesung verwendete Abfolge $i = 1, 2, \ldots, n$ ist nur die Naheliegendste.

Programmiere das Einzelschrittverfahren für das LGS mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n = 16$, und

$$\begin{array}{c|cccccc} a_{ij} = & -1 & -1 & 8 & -2 & -2 & 0 \\ \hline \text{für } j = & i-8 & i-1 & i & i+1 & i+8 & \text{sonst} \end{array}, \quad \text{sowie } b = \mathbb{1},$$

einmal für die Indexreihenfolge $i = 1, 2, \ldots, n$ und dann für $i = n, n-1, \ldots, 1$. Führe jeweils mit $x^{(0)} := 0$ soviele Schritte durch bis für die Änderungen gilt $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty \leq 10^{-8}$. Vergleiche die Anzahl der Schritte für beide Varianten.

Abgabe: Mittwoch, 05.06.2017, vor der Vorlesung.