Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, A. Görlich

Übungen zur Vorlesung Numerische Basisverfahren
5. Aufgabenblatt

HINWEIS: Anmeldung zur Klausur
Ab Montag, den 22.05.2017, können Sie sich im LSF/QIS-Portal für Prüfungen des ersten Prüfungstermins an- und abmelden. Der Zeitraum wurde gegenüber der bisherigen Praxis nach hinten verlängert und endet am 06.07.2017. Für die Prüfungen des zweiten Termins (bzw. des „Wiederholungstermins") werden die An- und Abmeldungen vom 28.08.2017 bis zum 07.09.2017 möglich sein.

Aufgabe 16 (3)

Bei gegebenen Koeffizienten a_i, $i = -1, \ldots, n+1$, auf einem äquidistanten erweiterten Gitter ist nach (2.3.16) der Wert des Splines $s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} a_i B_i(x)$ im Punkt $x \in (x_j, x_{j+1}]$ tatsächlich gegeben durch $s(x) = \sum_{i=j-1}^{j+2} a_i \hat{B}(x - x_i)$.
Zeigen Sie mit Formel (2.3.15) und $\xi := \frac{x-x_j}{h}$, dass diese Darstellung übereinstimmt mit $s(x) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3$, wobei gilt

$$\begin{aligned} A_0 &= \tfrac{1}{6}\left(a_{j-1} + 4a_j + a_{j+1}\right), \quad A_1 = \tfrac{1}{2}\left(a_{j+1} - a_{j-1}\right), \\ A_2 &= \tfrac{1}{2}\left(a_{j-1} - 2a_j + a_{j+1}\right), \quad A_3 = \tfrac{1}{6}\left(a_{j+2} - 3a_{j+1} + 3a_j - a_{j-1}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 17 (5)

Wenn man in jedem Teilintervall $(x_i, x_{i+1}], 0 \le i < n$, eines (äquidistanten) Gitters Δ ein kubisches Hermite-Interpolationspolynom verwendet, erhält man insgesamt einen Spline aus S_3^1. Es sei jetzt $s \in S_3^1$ definiert durch

$$s(x_i) = f(x_i), \quad s'(x_i) = m_i := f[x_{i-1}, x_{i+1}], \;\; i = 0, \ldots, n,$$

mit Approximationen m_i an die Ableitungen $f'(x_i)$. Hier wird das erweiterte Gitter $\bar{\Delta} = \{x_{-1}, x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ verwendet. Zeigen Sie, dass der so definierte Spline s in $[x_0, x_n]$ für $f \in C^4[x_{-1}, x_{n+1}]$ eine Approximation der Ordnung h^3 an f ist.

Aufgabe 18 (3)

Quadratische Splines besitzen nicht so gute Eigenschaften wie die kubischen. Gesucht ist der Spline $s \in S_2^1$ mit den Interpolationsbedingungen $s(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$ in der Beziér-Bernstein-Darstellung mit Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{2n}$ bei äquidistantem Gitter ($h_i \equiv h$).

a) Stellen Sie das (noch unterbestimmte) Gleichungssystem für die Koeffizienten $b_{2j-1},\ j = 1, \ldots, n$, auf.

b) Ergänzen Sie dieses System durch die Zusatzbedingung $s'(x_0) = y_0'$ und berechnen Sie explizit den Wert b_{2n-1}. Konstruieren Sie damit einen Datenvektor $y = (y_0, \ldots, y_n)$ mit dem gilt $|b_{2n-1}| \geq n\|y\|_\infty$ bei $y_0' = 0$.

Aufgabe 19 (4)

1. Berechnen Sie jeweils die normalisierte Dezimaldarstellung ($B = 10$) von
   $(10101.101)_2$,
   $(10.\overline{101})_2$.

2. Berechnen Sie für $B = 10, l = 4$ bei üblicher Rundung:
   $(18.76 \mathbin{\tilde{*}} 18.76) \mathbin{\tilde{-}} (18.66 \mathbin{\tilde{*}} 18.66)$
   $(18.76 \mathbin{\tilde{+}} 18.66) \mathbin{\tilde{*}} (18.76 \mathbin{\tilde{-}} 18.66)$
   Welcher der beiden Alternativen liefert das genauere Ergebnis und warum?

Abgabe: Mittwoch, 31.05.17, vor der Vorlesung.