Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, A. Görlich

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BASISVERFAHREN
6. Aufgabenblatt

Aufgabe 20 (3)

Die Differenz von zwei Quadraten kann auf die beiden Weisen $a \cdot a - b \cdot b = (a+b)(a-b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, ausgewertet werden, welche jeweils drei Operationen erfordern, vgl. Aufgabe 19/2. Bestimmen Sie für beide Varianten der Formel die zu erwartenden Rundungsfehler bei exakter Eingabe $a, b \in M$, wobei Produkte der Größenordnung $\mathcal{E}^2$ vernachlässigt werden.

Aufgabe 21 (4)

Es seien $x, y \in M = M(B, \ell, \infty)$, $x, y \geq 0$, zwei Maschinenzahlen zur Basis $B > 1$, $B \in \mathbb{N}$, mit Mantissenlänge ℓ und unbeschränktem Exponentenbereich $e = \infty$.

(i) Zeigen Sie: Gilt $\frac{y}{2} \leq x \leq 2y$, so ist die Subtraktion $x \tilde{-} y$ exakt, $x \tilde{-} y = x - y$.

(ii) Für die Exponenten d_x und d_y von x bzw. y gelte $|d_x - d_y| \leq 1$. Ist $x \tilde{-} y$ auch in diesem Fall exakt?

Aufgabe 22 (4)

Es sei $y = (y_1, y_2)^T$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 &= 2 \\ x_3 y_1 + x_4 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

mit $x_1 x_4 - x_2 x_3 \neq 0$. Jede Komponente der Lösung hängt von den Koeffizienten der Matrix ab, etwa

$$y_1 = F(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

(i) Bestimmen Sie die Konditionszahlen $\kappa_1, \ldots, \kappa_4$ für diese Abbildung F.

(ii) Von den beiden Größen

$$p := \frac{x_1 x_4}{x_2 x_3}, \quad q := \frac{x_2 x_3}{x_1 x_4}$$

ist mindestens eine wohldefiniert. Geben Sie jede der Konditionszahlen sowohl als Funktion von p als auch von q an.

Aufgabe 23 (Abgabe 14.06.2017) (5)

Erstellen Sie ein Programm zur Auswertung des Splines

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} a_i(f) B_i(x), \quad x \in (\alpha, \beta] := (0, 1].$$

Implementieren Sie dazu zunächst ein Unterprogramm/eine Funktion `bspline(i, x)`, das/die eine Auswertung von $B_i(x)$ durchführt. Die Koeffizienten $a_i(f)$, $i = -1, \ldots, n+1$, sollen dabei explizit gemäß der Formel

$$a_i(f) = \frac{1}{6}(-f(x_{i-1}) + 8f(x_i) - f(x_{i+1}))$$

berechnet werden (lokale Spline-Approximation). Als Daten werden die Stützstellen $x_i = \frac{1}{20}i$, $i = -3, \ldots, 23$ ($n = 20$), und die Werte der Funktion $f(x) := 4e^{x^2}$ verwendet. Testen Sie das Programm durch Berechnung der Differenzen $|s(z) - f(z)|$ in den Punkten $z \in \{\frac{1}{8}i, i = 1, \ldots, 8\}$.

Abgabe: Mittwoch, 07.06.17, vor der Vorlesung.