

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BASISVERFAHREN
8. Aufgabenblatt

Aufgabe 28

(4)

Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax=b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

jeweils mittels

- i) Gauss-Elimination ohne Pivotisierung, wie lautet die LR-Zerlegung von A ?
- ii) Gauss-Elimination mit einfacher Spaltenpivotisierung (absolutes Maximum).
- iii) Gauss-Elimination mit Spaltenpivotisierung (relatives Maximum).

Aufgabe 29

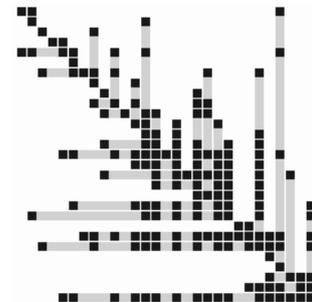
(4)

Unter der Skyline-Struktur einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ii} \neq 0 \forall i$ versteht man folgende Indexlisten

$$W_i := \min\{j : a_{ij} \neq 0\}, \quad N_i := \min\{k : a_{ki} \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Elemente $W_i \leq i, N_i \leq i$ geben an, wie weit vom i -ten Hauptdiagonalelement aus gesehen die Zeile nach links (Westen) bzw. die Spalte nach oben (Norden) nichttriviale Elemente hat.

Zeigen Sie,



- i) dass der Gauß-Algorithmus ohne Pivotisierung die Skyline nicht ändert.
- ii) dass sich die Zahl der Operationen dafür abschätzen lässt durch

$$\sum_{i=2}^n ((i - W_i)^2 + (i - N_i + 1)^2 + (i - W_i)).$$

Aufgabe 30

(4)

Gegeben sei die symmetrische, reelle Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -b_2 & & & \\ -b_2 & a_2 & -b_3 & & \\ & -b_3 & a_3 & -b_4 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -b_n & a_n \end{pmatrix},$$

mit $a_i, b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ ($b_1 := 0, b_{n+1} := 0$).

- i) Es gelte $a_i - b_i - b_{i+1} \geq d > 0$, $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass A dann positiv definit ist mit $x^\top Ax \geq d \|x\|_2^2 \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- ii) Für ein $t > 0$ gelte $a_1 \geq t$ und $ta_i - b_i^2 - t^2 \geq 0$, $i = 2, \dots, n$. Formulieren Sie den Gauß-Algorithmus zur Zerlegung $A = LR$ und zeigen Sie, dass für die Pivotelemente gilt $r_{ii} \geq t$, $i = 1, \dots, n$, eine Pivotisierung also nicht erforderlich ist.
- iii) Bestimmen Sie unter den Voraussetzungen aus ii) den Rechenaufwand zur Durchführung des Gauß-Algorithmus beim System $Ax = y$.

Aufgabe 31 (Abgabe: 28.6.2017)

(5)

Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens (mit und ohne Spaltenpivotisierung). Wenden Sie beide Versionen an auf das Problem

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

und geben Sie jeweils x , $r := b - Ax$, $\|r\|_\infty$ sowie $\|x - x_{\text{exakt}}\|_\infty$ aus, wobei $x_{\text{exakt}} = (-3, -1, 2, 2)^\top$.

Abgabe: Mittwoch, 21.06.17, vor der Vorlesung.