PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Sommersemester 2012
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 1

Abgabe am Donnerstag, 19.04.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Ideale von Punkten *(2 Punkte)*

Zeigen Sie: Für einen Punkt $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ gilt

$$\{ f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid f(a) = 0 \} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n).$$

Warum kann man schon auf der linken Seite der Gleichung erkennen, dass es sich bei der Menge um ein Ideal handelt?

Aufgabe 2: Hyperflächen *(4 Punkte)*

Es sei f ein nicht-konstantes Polynom aus $K[X_1, \dots, X_n]$. Wir betrachten die affine Varietät $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ (eine *Hyperfläche*). Zeigen Sie: Falls K unendlich ist, enthält das Komplement $\mathbb{A}^n - V(f)$ unendlich viele Elemente.

(Hinweis: Fassen Sie f als Polynom in der Unbestimmten X_n mit Koeffizienten in $K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ auf und führen Sie Induktion nach n.)

Aufgabe 3: Hyperflächen *(3 Punkte)*

Es sei f ein nicht-konstantes Polynom aus $K[X_1, \dots, X_n]$ und $X = V(f)$ die zugehörige Hyperfläche in $\mathbb{A}^n$. Zeigen Sie: Falls K algebraisch abgeschlossen ist und falls $n \geq 2$ ist, so enthält X unendlich viele Elemente.

(Hinweis: Sie können die gleiche Methode wie in der vorigen Aufgabe anwenden.)

Aufgabe 4: Ideale und Varietäten *(3 Punkte)*

Gegeben sei das Ideal $J = (X^2 + Y^2 - 1, Y - 1) \subset K[X, Y]$.

(a) Bestimmen Sie die Varietät $V(J)$ und ihr Ideal
$I(V(J)) := \{ f \in K[X, Y] \mid f(x, y) = 0 \ \forall\, (x, y) \in V(J) \}$.

(b) Welches der Ideale J und $I(V(J))$ ist im anderen enthalten. Falls eine echte Inklusion vorliegt, geben Sie ein Polynom an, das in einem der beiden Ideale liegt aber nicht im anderen.