PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Sommersemester 2012

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 2

Abgabe am Donnerstag, 26.04.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 5: Ideal einer Varietät *(4 Punkte)*

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $r \leq n$ natürliche Zahlen. Weiterhin seien $L_1, \ldots, L_r$ Polynome vom Grad 1 in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$I(V(L_1, \ldots, L_r)) = (L_1, \ldots, L_r).$$

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $L_i = X_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Im nächsten Schritt können Sie zunächst annehmen, dass die Polynome $L_1, \ldots, L_r$ linear unabhängig über K sind.

Aufgabe 6: Komponentenzerlegung von Varietäten *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Ideale $J = (X^2 + Y^2 - Z^2, Z - 1)$ und $J' = (X^2 + Y^2 - Z^2, X)$ in $\mathbb{R}[X, Y, Z]$. Skizzieren Sie die Varietäten $V(J), V(J')$ als Durchschnitt von Hyperflächen in $\mathbb{R}^3$ und bestimmen Sie ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Aufgabe 7: Radikalideal *(4 Punkte)*

Sei $J \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Radikalideals:

(a) $\sqrt{J}$ ist ein Ideal. (Hinweis: Binomische Formel)

(b) $\sqrt{\sqrt{J}} = \sqrt{J}$.

(c) Ist J ein Primideal, so gilt $\sqrt{J} = J$.

Aufgabe 8: Radikalideal *(4 Punkte)*

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir betrachten das Ideal
$J = (X^3 + Y^3 - 1, X - 1) \subset K[X, Y, Z]$ und das Polynom $f = X^2 + Y^2 - 1$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von J.

(b) Liegt f im Radikal von J? Wenn ja: Geben Sie eine Potenz von f an, die in J liegt.