PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Sommersemester 2012

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 3

Abgabe am Donnerstag, 03.05.2012 vor der Vorlesung

Auf dem gesamten Blatt arbeiten wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.

Aufgabe 9: Varietäten und Ideale *(3 Punkte)*

(a) Es seien I und J Ideale in $K[X_1, \dots, X_n]$ mit $I \subset \sqrt{J}$. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl m gibt, so dass
$$I^m \subset J$$
gilt.

Hinweis: Betrachten Sie geeignete Erzeuger von I^m, welche Sie aus Erzeugern von I gewinnen.
Folgern Sie: Zu jedem Ideal I in $K[X_1, \dots, X_n]$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(\sqrt{I})^m \subset I$.

(b) Es seien I und J Ideale in $K[X_1, \dots, X_n]$. Zeigen Sie: Die Varietäten $V(I)$ und $V(J)$ sind genau dann gleich, wenn es eine natürliche Zahl m gibt mit
$$I^m \subset J \quad \text{und} \quad J^m \subset I \ .$$

Aufgabe 10: Beispiele für Morphismen *(6 Punkte)*

Für $n \geq 2$ sei die Abbildung $\varphi_n : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ durch $t \longmapsto (t^2, t^n)$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $C = \varphi_n(\mathbb{A}^1)$ eine affine Varietät ist.

(b) Sei n ungerade. Zeigen Sie, dass $\varphi_n : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \varphi_n(\mathbb{A}^1)$ bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung an.

(c) Ist die Umkehrabbildung in Teil (b) ein Morphismus? (Achtung: Es genügt nicht, *eine* Darstellung anzugeben, die kein Polynom ist.)

(d) Sei n gerade. Zeigen Sie, dass $\varphi_n(\mathbb{A}^1)$ zu $\mathbb{A}^1$ isomorph ist. Ist φ_n bijektiv?

Aufgabe 11: Affine Hyperbeln *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Kurve $V(XY - 1) \subset \mathbb{A}^2$ nicht zu $\mathbb{A}^1$ isomorph ist.

Hinweis: Betrachten Sie die jeweiligen Koordinatenringe.

Aufgabe 12: Bild und Urbild von Polynomabbildungen *(3 Punkte)*

Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine Polynomabbildung zwischen den affinen Varietäten V und W.

(a) Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(U)$ einer Untervarietät $U \subset W$ eine Untervarietät von V ist. (Dies zeigt, dass alle Polynomabbildungen stetig bezüglich der Zariski-Topologie sind.)

(b) Zeigen Sie, dass das Bild $f(V)$ im Allgemeinen keine Untervarietät von W ist.

Hinweis: Bilden Sie die Hyperbel aus Aufgabe 11 auf geeignete Weise ab.