PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Sommersemester 2012

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 4

Abgabe am Donnerstag, 10.05.2012 vor der Vorlesung

Auf dem gesamten Blatt arbeiten wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.

Aufgabe 13: Automorphismen der affinen Ebene *(4 Punkte)*

Zu einem Polynom $p \in K[X]$ betrachten wir die Polynomabbildung

$$\begin{aligned} f_p : \mathbb{A}^2 &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \\ (u,v) &\longmapsto (u, v + p(u)) . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) f_p ist ein Isomorphismus.

(b) $\{ f_p \mid p \in K[X] \}$ ist eine Gruppe.

Aufgabe 14: Roboter *(4 Punkte)*

Wir betrachten den Zustandsraum $X \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ des Roboters aus §29 der Vorlesung.

(a) Bestimmen Sie das Bild B der Projektion $X \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ auf die letzten beiden Koordinaten.

(b) Ist B eine affine Varietät?

Aufgabe 15: Morphismen algebraischer Varietäten *(4 Punkte)*

Wir betrachten für $i = 1, \dots, 3$ die Abbildungen $g_i : K[X,Y] \longrightarrow K[X,Y]$ mit

- $g_1 : \sum a_{ij} X^i Y^j \longmapsto \sum a_{ij} Y^j$
- $g_2 : \sum a_{ij} X^i Y^j \longmapsto \sum a_{i+1,j+1} X^i Y^j$
- $g_3 : \sum a_{ij} X^i Y^j \longmapsto \sum a_{i,j} X^{2i} Y^j$.

(a) Entscheiden Sie, ob zu diesen Abbildungen jeweils eine Polynomabbildung $f_i : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ existiert, so dass $g_i = f_i^*$ gilt. Geben Sie diese im Falle der Existenz an.

(b) Klären Sie, ob es in den Fällen, in denen eine Abbildung f_i wie in Teil a) existiert, eine Kurve $C_i \subset \mathbb{A}^2$ gibt, so dass $f_i|_{C_i} : C_i \longrightarrow f(C_i)$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 16: Isomorphismen *(4 Punkte)*

Sei $f : V \longrightarrow W$ eine Polynomabbildung zwischen den affinen Varietäten V und W. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $f^* : K[W] \longrightarrow K[V]$ ist surjektiv.

(ii) $f(V)$ ist eine Untervarietät von W, und f liefert einen Isomorphismus $V \longrightarrow f(V)$.

Hinweis: Für die Richtung (i) $\Rightarrow$ (ii) betrachten Sie das Ideal $\mathrm{kern} f^* \subset K[W]$.