PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Sommersemester 2012

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 6

Abgabe am 24.05.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 19: Zentralprojektion der Kugel *(4 Punkte)*

Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Es sei $V = V(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$ die Kugel im $\mathbb{A}^3_K$ und H die Hyperebene $H = V(Z)$. Sei weiterhin f die Zentralprojektion von V auf H ausgehend vom Punkt $p = (0, 0, 1)$, d. h. $f(v)$ ist der Schnittpunkt von H mit der Geraden durch v und p. (Beispielsweise ist $f(0, 0, -1) = (0, 0, 0)$.)
Zeigen Sie, dass $f : V \dashrightarrow H$ ein birationaler Morphismus ist.

Aufgabe 20: Zariski-Topologie *(4 Punkte)*

Die *Produkttopologie* ist diejenige Topologie auf dem Produkt zweier topologischer Räume, deren offene Mengen genau die Vereinigungen von Produkten offener Mengen sind. (Zum Beispiel ist die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ die Produkttopologie der euklidischen Topologie auf den Faktoren.) Zeigen Sie: Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ ist nicht die Produkttopologie der Zariski-Topologie auf den beiden Faktoren $\mathbb{A}^1$.

Aufgabe 21: Lokale Ringe *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Kurven

$$\begin{aligned} X &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \;\middle|\; xy = 0 \right\} \\ Y &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \;\middle|\; y^2 - x^3 - x^2 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Der lokale Ring von Y im Ursprung ist ein Integritätsring, derjenige von X im Ursprung aber nicht.
Hinweis: Für den ersten Teil überlegen Sie sich, dass $\frac{f_1}{h_1} \cdot \frac{f_2}{h_2} = 0$ im lokalen Ring genau dann gilt, wenn $f_1 f_2 h_1 h_2 \in I(Y)$ gilt.

Aufgabe 22: Quasi-affine Varietäten *(4 Punkte)*

(a) Geben Sie eine Kurve $C \subset \mathbb{A}^2$ an, deren Projektion nach $\mathbb{A}^1$ sie isomorph auf $\mathbb{A}^1 - \{ 0 \}$ abbildet.
(b) Geben Sie eine Fläche $V(G) \subset \mathbb{A}^3$ an, deren Projektion nach $\mathbb{A}^2$ sie isomorph auf das Komplement der Gerade $V(x - y)$ abbildet.