PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Sommersemester 2012

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 7

Abgabe am 31.05.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 23: Quasi-affine Varietäten *(4 Punkte)*

(a) Es seien V_1, V_2 affine Varietäten mit nicht-leeren offenen Teilmengen $U_1 \subset V_1$, $U_2 \subset V_2$. Zeigen Sie: Ein Morphismus $f : U_1 \longrightarrow U_2$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn

$$f^* : \mathcal{O}_{V_2}(U_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{V_1}(U_1)$$

ein Isomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass die quasi-affine Varietät $\mathbb{A}^2 - \{(0,0)\}$ nicht zu einer affinen Varietät isomorph ist.

Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 18.

Aufgabe 24: Singularitäten *(4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie alle Singularitäten des *Kegels* $C = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Singularitäten der Fläche $V(Y^2 - X^3 - X^2) \subset \mathbb{A}^3$ eine Kurve bilden.

Aufgabe 25: Singularitäten und Tangentialkegel *(4 Punkte)*
Recherchieren Sie die Gleichung der *Bicorne-Kurve* (auch *cocked hat* genannt) von Sylvester und Cayley, und bestimmen Sie deren Singularitäten. Geben Sie zu jeder Singularität die Geraden an, aus denen der Tangentialkegel besteht. (Für eine Kurve $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2$ und einen Punkt $p \in C$ sei f_m der niedrigste Term in der Taylorentwicklung von f um p. Dann heißt $V(f_m)$ der *Tangentialkegel* an C in p.)

Aufgabe 26: Roboter *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die *Roboter-Varietät*

$$R = V\left(x_1^2 + x_2^2 - 4\,,\ (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 - 1\right) \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$$

glatt ist.
(Hierzu dürfen Sie nutzen, dass das Ideal $(x_1^2 + x_2^2 - 4\,,\ (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 - 1)$ ein Radikalideal ist.)