PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Sommersemester 2012

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 8

Abgabe bis **Freitag 08.06.2012, 10 Uhr**,
in Zimmer 07A02 (David Schmitz) oder per Email

Aufgabe 23: Rationale Normkurve im $\mathbb{A}^3$ *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$, $t \longmapsto (t, t^2, t^3)$.

(a) Zeigen Sie, dass das Bild $C = f(\mathbb{A}^1)$ eine affine Varietät ist und bestimmen Sie deren Ideal.
Hinweis: Betrachten Sie für ein Polynom, das auf C verschwindet, das Polynom $\widetilde{f} := f(x, y + x^2, z + x^3)$.

(b) Zeigen Sie: C ist glatt und hat Dimension 1.

Aufgabe 24: Isomorphismen lokaler Ringe *(4 Punkte)*

Es seien $X \subset \mathbb{A}^n$ und $Y \subset \mathbb{A}^m$ affine Varietäten, die den Nullpunkt enthalten. Zeigen Sie: Falls es einen K-Algebren-Homomorphismus

$$\varphi : \mathcal{O}_{Y,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,0}$$

gibt, so existieren Teilmengen $U \subset X$ und $V \subset Y$, die beide den Nullpunkt enthalten, und einen Isomorphismus

$$f : U \longrightarrow V$$

mit $f(0) = 0$.

Aufgabe 25: Homogene Polynome *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen über ein Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und eine natürliche Zahl d äquivalent sind:

(i) f ist homogen vom Grad d

(ii) alle Monome von f haben Grad d.

Aufgabe 26: Die Veronese-Fläche *(4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\longmapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2) \end{aligned}$$

eine Abbildung definiert wird und dass das Bild $V := \varphi(\mathbb{P}^2)$ eine projektive Varietät ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow V$ bijektiv ist, indem Sie die Umkehrabbildung explizit angeben.