PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Sommersemester 2012

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 9

Abgabe am Donnerstag, 14.06.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 31: Projektive Varietäten *(4 Punkte)*

Sei $C := V(X_0^2 + X_1^2 - X_2^2) \subset \mathbb{P}^2$ und $H_2 := V(X_2)$. Betrachten Sie die Einbettung

$$\iota : \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \quad (X_0, X_1) \longmapsto (X_0 : X_1 : 1).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\iota^{-1}(C)$ eine affine Kurve ist.

(b) Bestimmen Sie $C \cap H_2$, die *unendlich fernen Punkte* von C.

(c) Führen Sie a) und b) auch für die Kurven $C_{a,b,r} = V((X_0 - aX_2)^2 + (X_1 - bX_2)^2 - r^2X_2^2)$ durch, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{C} - \{0\}$ gelte.

(d) Bestimmen Sie alle Kurven $C = V(f) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ mit $\deg(f) = 2$, die durch die Punkte $(1 : i : 0)$ und $(1 : -1 : 0)$ gehen.

Aufgabe 32: Homogene Ideale *(4 Punkte)*

Seien I, J und I_λ für λ in einer beliebigen Indexmenge Λ homogene Ideale in einem graduierten Ring S. Zeigen Sie, dass dann auch die Ideale

$$I \cap J, \quad I \cdot J, \quad \sqrt{J}, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$$

homogen sind.

Hinweis: Benutzen Sie die jeweils günstigere der beiden äquivalenten definierenden Eigenschaften homogener Ideale.

Aufgabe 33: Euler Formel *(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Für ein homogenes Polynom $F \in K[X_0, \ldots, X_n]$ vom Grad d gilt

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i} \cdot X_i = d \cdot F.$$

Hier bezeichnet $\frac{\partial}{\partial X_i}$ die formale Ableitung nach der Unbestimmten X_i.

Aufgabe 34: Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Varietäten *(4 Punkte)*

Sei $X = V(f)$ eine Hyperfläche im $\mathbb{P}^n$ und $p \in X$. Zeigen Sie:

(a) X ist in p genau dann singulär, wenn gilt

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}(p) = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

(b) Für den projektiven Tangentialraum gilt

$$\mathbb{T}_p X = V\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(p) \cdot X_i\right).$$