PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Sommersemester 2012

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 10

Abgabe am Donnerstag, 21.06.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 35: Projektive Transformationen mit vorgegebenen Punkten *(4 Punkte)*

Gegeben seien zwei Mengen von $n+2$ Punkten

$$\{ p_1, \ldots, p_{n+2} \} \subset \mathbb{P}^n \quad \text{und} \quad \{ q_1, \ldots, q_{n+2} \} \subset \mathbb{P}^n$$

mit der Eigenschaft, dass jeweils $n+1$ Punkte nicht auf einer gemeinsamen Hyperebene liegen. Zeigen Sie, dass es eine projektive Transformation $\varphi_A : [x] \longmapsto [Ax]$ gibt mit $\varphi_A(p_i) = q_i,\ i = 1, \ldots, n+2$.
(Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für $p_1 = (1 : 0 : \ldots : 0), \ldots, p_{n+1} = (0 : \ldots : 0 : 1)$, $p_{n+2} = (1 : 1 : \ldots : 1)$ und schließen Sie dann auf den allgemeinen Fall.)

Aufgabe 36: Die Cayley-Kubik *(4 Punkte)*

Sei $X \subset \mathbb{P}^3$ eine irreduzible Kubik mit mindestens vier Singularitäten, die nicht alle in einer Ebene liegen. Zeigen Sie, dass es bis auf projektive Äquivalenz nur eine solche Kubik gibt, nämlich die mit der Gleichung

$$x_0x_1x_2 + x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3 + x_1x_2x_3 = 0.$$

Insbesondere besitzt dann X *genau* vier Singularitäten.
(Hinweis: Nach einer projektiven Transformation dürfen Sie vier singuläre in günstiger Lage annehmen. Was lässt sich dann über die Gleichung von X sagen?)

Aufgabe 37: Projektionen *(4 Punkte)*

(a) Begründen Sie, dass durch

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{P}^3 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \longmapsto & (x_1 : x_2 : x_3) \end{array}$$

eine rationale Abbildung gegeben wird und bestimmen Sie ihren Definitionsbereich.

(b) Wir betrachten nun die Einschränkung $g := f|_Q$ auf die Quadrik $Q = V(x_0x_3 - x_1x_2)$. Zeigen Sie dass g birational ist und geben Sie offene Teilmengen $U \subset Q$ und $V \subset \mathbb{P}^2$ an, so dass g einen Isomorphismus $U \longrightarrow V$ induziert.

Aufgabe 38: Rationale Abbildungen *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass jede rationale Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ regulär ist.
(Hinweis: Benutzen Sie, dass den Nullstellen eines homogenen Polynoms in zwei Unbestimmten genau die Linearfaktoren entsprechen.)