PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
D. Schmitz

Sommersemester 2012

Aufgaben zur Algebraischen Geometrie

Blatt 11

Abgabe am Donnerstag, 28.06.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 49: Veronese-Abbildung *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Monome vom Grad d

$$y_{i_0,\dots,i_n} := x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad i_0 + \ldots + i_n = d.$$

Die rationale Abbildung

$$\begin{aligned} v_d : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto (y_{d,0,\dots,0} : \ldots : y_{0,\dots,0,d}) \end{aligned}$$

(bei beliebiger aber fester Abzählung) mit $N = \binom{n+d}{d} - 1$ nennen wir *Veronese-Abbildung* vom Grad d. Zeigen Sie im Fall $n = 2$, dass $V := v_d(\mathbb{P}^n)$ eine projektive Varietät ist und $v_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow V$ ein Isomorphismus ist. (Dies ist für beliebige n richtig.)

Aufgabe 50: Affine Teilmengen von projektiven Varietäten *(4 Punkte)*

Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät und $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche vom Grad d. Zeigen Sie, dass $X \backslash Y$ zu einer affinen Varietät isomorph ist.
(Hinweis: Betrachten Sie das Bild von $X \backslash Y$ unter der Veronese-Abbildung vom Grad d.)

Aufgabe 51: Die generische Hyperfläche im $\mathbb{P}^n$ ist glatt *(4 Punkte)*

Es sei $P_d := \mathbb{P}(K[x_0, \dots, x_n]_d)$ der projektive Raum zum Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d in $\mathbb{P}^n$. Wir können die Elemente von P_d als Hyperflächen im $\mathbb{P}^n$ auffassen (durch Übergang zur Nullstellenmenge). Zeigen Sie: Es gibt eine dichte offene Menge $U \subset P_d$, so dass jedes Element $X \in U$ eine glatte Hyperfläche ist.
(Hinweis: betrachten Sie sie „universelle Hyperfläche vom Grad d“ $I = \{ (D, x) \mid x \in D \}$ im Produkt $P_d \times \mathbb{P}^n$ und betrachten Sie die Projektion auf die erste Komponente.

Aufgabe 52: Glatte Hyperflächen *(4 Punkte)*

Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche. Zeigen Sie: Falls X glatt ist, so ist X irreduzibel.