PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Präsenzaufgaben für die erste Übung

Aufgabe 1: Euklidischer Algorithmus
Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler

$$\mathrm{ggT}(a, b)$$

und stellen Sie ihn als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von a und b dar;
(a) für $(a, b) = (174420, 29325)$, und
(b) für $(a, b) = (-34, 30)$.

Aufgabe 2: Teilbarkeit
Gegeben sei eine natürliche Zahl $p > 1$ mit der Eigenschaft, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$p|ab \Longrightarrow p|a \text{ oder } p|b.$$

Zeigen Sie, dass p eine Primzahl ist. Geben Sie zwei Beweise an, einen mit Benutzung der Primfaktorzerlegung, einen ohne.

Aufgabe 3: Algorithmus
Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

INPUT $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$(x, y) := (a, b)$
WHILE $x \neq y$ DO
$$\left[\begin{array}{l} \text{IF } \ x > y \ \text{ DO} \\ \Big[x := x - y \\ \text{ELSE DO} \\ \Big[y := y - x \end{array}\right]$$
OUTPUT x

Welchen Wert gibt der Algorithmus aus? Überlegen Sie sich dazu, welche Schleifeninvariante bestehen bleibt und begründen Sie, dass der Algorithmus stets terminiert.

Aufgabe 4: Euklidischer Algorithmus
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zu $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass gilt

$$a = bq + r \text{ und } 0 \leq r < |b|.$$

Zeigen Sie, dass q und r eindeutig bestimmt sind.
Tipp: Nehmen Sie die Existenz eines weiteren solchen Zahlenpaares (q', r') an und zeigen Sie, dass $b|(r' - r)$ gilt.