PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Wintersemester 2012/2013
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 1

Abgabe am Freitag, 26.10.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 5: Teilbarkeit *(4 Punkte)*

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a|bx \Longrightarrow a|x$$

und zwar

(a) ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$, und

(b) unter Benutzung der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 6: ggT *(4 Punkte)*

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie (ohne Benutzung der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$):
Für ein $d \in \mathbb{Z}$ gilt $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ genau dann, wenn gilt

(1) $d|a$ und $d|b$

(2) jedes $e \in \mathbb{Z}$, das a und b teilt, teilt auch d.

Aufgabe 7: Primfaktorzerlegung *(4 Punkte)*

Begründen Sie, dass in $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ jedes von 0 verschiedene Element eine Zerlegung in endlich viele unzerlegbare Elemente hat.
Hinweis: Betrachten Sie zu $a \in R$ das Betragsquadrat $N(a) := |a|^2$ (mit dem in $\mathbb{C}$ üblichen Betrag). Überlegen Sie sich

- Für alle $a \in R$ ist $N(a) \in \mathbb{N}$.
- Was können Sie über $N(a)$ und $N(b)$ sagen, wenn $a|b$ gilt?
- Welche $a \in R$ haben $N(a) = 1$?

Aufgabe 8: Fibonacci-Zahlen *(4 Punkte)*

Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sind definiert als

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1$$
$$f_n := f_{n-1} + f_{n-2}.$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(f_6, f_5)$ mit dem Euklidischen Algorithmus.

(b) Was liefert der Euklidische Algorithmus für $\mathrm{ggT}(f_n, f_{n-1})$ bei beliebigem $n \in \mathbb{N}$?

(c) Man kann zeigen, dass die Berechnung von $\mathrm{ggT}(f_n, f_{n-1})$ der „worst case“ für den Euklidischen Algorithmus darstellt. Wieviele elementare Rechenschritte (hier: Divisionen) werden bei der Berechnung von $\mathrm{ggT}(f_n, f_{n-1})$ durchgeführt?