PHILIPPS-UNIVERSITï¿½T MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 2

Abgabe am Freitag, 02.11.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 9: Kongruenzsysteme *(2 Punkte + 2 Bonuspunkte)*

Das Kongruenzsystem

$$\begin{aligned} x &\equiv b_1 (\mathrm{mod}\ 4) \\ x &\equiv b_2 (\mathrm{mod}\ 6) \end{aligned}$$

erfüllt die Voraussetzung des chinesischen Restsatzes nicht.

(a) Geben Sie zwei Beispiele für b_1, b_2, für die es unlösbar ist.

(b) Geben Sie einige Beispiele, für die es lösbar ist.

(c) *(Bonusaufgabe)* Ermitteln Sie die genauen Bedingungen an b_1 und b_2, unter denen das System lösbar ist.

Hinweis: Welche Zahlen erfüllen die erste Kongruenz? Untersuchen Sie die zusätzliche Bedingung, die die zweite Kongruenz an diese Zahlen stellt.

Aufgabe 10: Halbgruppen *(4 Punkte)*

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $H := \mathrm{Abb}(M, M)$ zusammen mit der Komposition die Halbgruppe der Abbildungen von M nach M.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in H$ genau dann linksinvertierbar ist, wenn f injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f \in H$ genau dann rechtsinvertierbar ist, wenn f surjektiv ist.

(c) Für welche Mengen M ist $(H, \circ)$ kommutativ?

Aufgabe 11: Verknüpfungstafeln *(4 Punkte)*

(a) Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ zusammen mit der Verknüpfung $*$ eine endliche Gruppe. Die Matrix

$$M_G := (g_i * g_j)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$$

heißt *Verknüpfungstafel* von $(G, *)$. Beweisen Sie, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte von M_G jedes Element von G genau einmal vorkommt. Geben Sie ein Kriterium für die Kommutativität von G an.

(b) Beweisen Sie, dass es bis auf Benennung der Elemente genau eine Gruppe mit zwei und genau eine mit drei Elementen gibt. Sind diese Gruppen kommutativ?

Hinweis: Betrachten Sie die möglichen Verknüpfungstafeln.

Aufgabe 12: Symmetriegruppe des Würfels *(4 Punkte)*

Gegeben sei ein Würfel W im $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Symmetriegruppe $S(W)$, das heißt die Menge aller Kongruenzabbildungen („Bewegungen“, „Isometrien“) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(W) = W$.

(a) Bestimmen Sie die Elemente von $S(W)$.

(b) Geben Sie zwei verschiedene Elemente an, die miteinander kommutieren. Geben Sie außerdem Elemente an, die nicht miteinander kommutieren.

(c) Zu jedem Element γ einer endlichen Gruppe gibt es eine kleinste natürliche Zahl n, so dass $\gamma^n = \mathrm{id}$ gilt. Man nennt n die *Ordnung von* γ. Bestimmen Sie die größte in $S(W)$ vorkommende Ordnun g eines Elements.

Aufgabe 13: Direktes Produkt und direkte Summe von Gruppen *(2 Punkte)*
Sei $(G_i, *_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen mit neutralen Elementen $e_i \in G_i$. Wir definieren

$$\begin{aligned} P &:= \{(g_i)_{i\in I} \,|\, g_i \in G_i\}\,, \\ S &:= \{(g_i)_{i\in I} \,|\, g_i \in G_i \text{ und es gilt bis auf endlich viele Ausnahmen } g_i = e_i\}\,. \end{aligned}$$

Definieren Sie binäre (komponentenweise) Verknüpfungen auf P und S, und weisen Sie nach, dass P und S mit diesen Verknüpfungen Gruppen sind. Man nennt übrigens P das *direkte Produkt* und S die *direkte Summe* der Gruppen G_i.