PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 3

Abgabe am Freitag, 09.11.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 14: Homomorphismen der Worthalbgruppe *(4 Punkte)*

Wir betrachten hier $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ als Halbgruppe mit der Multiplikationsabbildung. Es bezeichne $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$ die Worthalbgruppe über $\mathbb{N}$.

(a) Es sei $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ die Abbildung, die einem Wort $(a_1, \ldots, a_n)$ die Zahl $\prod_{i=1}^n a_i$ zuordnet. (Dem leeren Wort wird somit $1 \in \mathbb{N}$ zugeordnet.) Begründen Sie: f ist ein Halbgruppenhomomorphismus (d.h. für $a, b \in \mathbb{N}^*$ gilt $f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$) und jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ hat unendlich viele Urbilder unter f.

(b) Zeigen Sie, dass es keinen *injektiven* Halbgruppenhomomorphismus $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt.

(c) Finden Sie einen Halbgruppenhomomorphismus $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$, unter dem jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ nur *endlich* viele Urbilder hat.

Aufgabe 15: Erzeugende Mengen *(4 Punkte)*

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $M \neq \emptyset$ eine Teilmenge von G. Die Menge

$$\langle M \rangle := \bigcap \{U \mid U \subset G \text{ Unterguppe mit } M \subset U\}$$

heißt das *Erzeugnis* von M.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle M \rangle$ die kleinste Untergruppe von G ist, welche M enthält.

(b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\langle M \rangle = \{a_1 \cdot \ \ldots \ \cdot a_r \mid a_i \in M \text{ oder } a_i^{-1} \in M,\ r \in \mathbb{N}\} .$$

(c) Geben Sie (ohne Beweis) Teilmengen M_1 und M_2 von $G_1 := (S_n, \circ)$ bzw. $G_2 := (\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ an, die diese Gruppen erzeugen, d. h. $\langle M_i \rangle = G_i$ soll gelten.

Aufgabe 16: Vereinigung von Untergruppen *(4 Punkte)*

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und U, V Untergruppen von G. Zeigen Sie: Die Vereinigung $U \cup V$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $U \subset V$ oder $V \subset U$ gilt.

Aufgabe 17: Direktes Produkt von Untergruppen *(4 Punkte)*

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und U, V Untergruppen von G, so dass $U \cap V = \{e\}$ und $U \cdot V = G$ gelten. Dabei ist $U \cdot V := \{u \cdot v \mid u \in U, v \in V\}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} U \times V & \longrightarrow & G \\ (u, v) & \longmapsto & u \cdot v \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

(ii) Für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt $u \cdot v = v \cdot u$.