PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 4

Abgabe am Freitag, 16.11.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 18: Index von Untergruppen *(4 Punkte)*

Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und U, V Untergruppen mit $V \subset U \subset G$.

(a) Sei $\{a_1 \cdot U, \dots, a_k \cdot U\}$ die Menge aller Linksnebenklassen von U in G und $\{b_1 \cdot V, \dots, b_l \cdot V\}$ die Menge aller Linksnebenklassen von V in U.
Beweisen Sie, dass

$$\{(a_i \cdot b_j) \cdot V \mid i \in \{1, \dots, k\},\, j \in \{1, \dots, l\}\}$$

die Menge aller Linksnebenklassen von V in G ist.

(b) Folgern Sie, dass gilt $[G : U] \cdot [U : V] = [G : V]$. Geben Sie außerdem an wie diese Identität aus dem Satz von Lagrange folgt.

Aufgabe 19: Äquivalenzrelationen *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Relation auf $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \sim (x', y') \quad :\Leftrightarrow \quad |x - y| = |x' - y'| \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ darstellt.

(b) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen $[(x_0, y_0)]$ geometrisch (Teilmengen der Ebene).

(c) Zeigen Sie, dass $N := [(0, 0)]$ ein Normalteiler in $(\mathbb{R}^2, +)$ ist.

(d) Erläutern Sie, ob (oder ob nicht) gilt $\mathbb{R}^2/N = \mathbb{R}^2/\sim$.

Aufgabe 20: Kongruenzrelationen *(6 Punkte)*

Im folgenden ist jeweils eine Gruppe G und eine Relation $\sim$ auf G gegeben. Prüfen Sie, ob $\sim$ eine Kongruenzrelation auf G ist und geben Sie gegebenenfalls den zugehörigen Normalteiler $N \subset G$ an. Zum Beispiel lässt sich die Normalteilereigenschaft einer Teilmenge N leicht feststellen, indem man einen geeigneten Homomorphismus angibt, dessen Kern gleich N ist. Was liefert dann jeweils der Homomorphiesatz?

(a) $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \;:\Leftrightarrow\; \det(A) = \det(B)$.

(b) $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \;:\Leftrightarrow\; \mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$.

(c) $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \;:\Leftrightarrow\; A = \lambda \cdot B$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d) $G = \{$Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}\}$ mit gliedweiser Addition,
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \;:\Leftrightarrow\; (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

(e) $G = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \;:\Leftrightarrow\; \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$.

(f) $G = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad A \sim B \;:\Leftrightarrow\; A - B$ hat keine negativen Eigenwerte.

(g) $G = \mathrm{S}_n$, $\quad \sigma \sim \tau \;:\Leftrightarrow\; \sigma(1) = \tau(1)$.

(h) $G = (\mathbb{R}^n, +)$, $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \;:\Leftrightarrow\; x_n = y_n$.

Aufgabe 21: Normalteiler *(2 Punkte)*

Es sei G eine Gruppe und $U \subset G$ eine Untergruppe von G vom Index 2. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von G ist.