PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 5

Abgabe am Freitag, 23.11.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 22: Direktes Produkt *(4 Punkte)*

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und U, V Untergruppen von G, so dass $U \cap V = \{e\}$ und $U \cdot V = G$ gelten. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} U \times V &\longrightarrow G \\ (u,v) &\longmapsto u \cdot v \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

(ii) Die Untergruppen U und V sind Normalteiler.

(*Hinweis:* Eine Möglichkeit besteht darin, Aufgabe 17 zu verwenden.)

Aufgabe 23: Zentrum *(3 Punkte)*

Es sei G eine Gruppe. Die Menge

$$Z(G) := \{a \in G \mid xa = ax \ \forall x \in G\}$$

heißt *Zentrum* von G. Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler in G ist und dass $G/Z(G)$ isomorph zu der Gruppe der inneren Autmorphismen von G ist.

Aufgabe 24: Normalteiler *(2 Punkte)*

Es sei $(G, \cdot)$ und U eine endliche Untergruppe von G mit $|U| = n$. Zeigen Sie: Falls U die einzige Untergruppe von G der Ordnung n ist, so ist U Normalteiler.

Aufgabe 25: Isomorphiesätze *(4 Punkte)*

Sei G eine Gruppe, $X \neq \emptyset$ eine Menge und Y eine Teilmenge von X.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Abb}(X, G)$ aller Abbildungen von X nach G zusammen mit der punktweisen Verknüpfung $f \cdot g := (x \longmapsto f(x) \cdot g(x))$ eine Gruppe ist.

(b) Wir setzen $I_{Y|X} := \{f \in \mathrm{Abb}(X, G) \mid f(y) = 1_G \ \forall \ y \in Y\}$. Zeigen Sie, dass $I_{Y|X}$ ein Normalteiler in $\mathrm{Abb}(X, G)$ ist und dass $\mathrm{Abb}(X, G)/I_{Y|X}$ isomorph zu $\mathrm{Abb}(Y, G)$ ist.

(c) Sei Z eine Teilmenge von Y. Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(\mathrm{Abb}(X,G)/I_{Y|X}\right) \big/ \left(I_{Z|X}/I_{Y|X}\right) \cong \mathrm{Abb}(Z,G) \quad .$$

Aufgabe 26: Gruppen der Ordnung 6 *(4 Punkte)*

Wir betrachten folgende Gruppen der Ordnung 6:

- S_3,

- $\mathbb{Z}_6$,
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$,
- $\{$ Drehungen im $\mathbb{R}^2$ um $(0,0)$ um Winkel, die Vielfache von $60°$ sind $\}$,
- D_3, die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Dreiecks.

Welche dieser Gruppen sind isomorph zueinander? Untersuchen Sie, ob die Gruppen abelsch oder sogar zyklisch sind und bestimmen Sie alle (nicht-trivialen) Untergruppen sowie deren Ordnungen.