PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 6

Abgabe am Freitag, 30.11.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 27: Endlich erzeugte abelsche Gruppen *(2+2+4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 100. (M. a. W.: Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung 100.) Zeigen Sie, dass jede dieser Gruppen ein Element der Ordnung 10 enthält.

(b) Zeigen Sie, dass jede dieser Gruppen für jeden Teiler d von 100 eine Untergruppe der Ordnung d enthält.

(c) Verallgemeinern Sie die Aussage von Aufgabenteil b) zu einem Satz über endliche abelsche Gruppen und beweisen Sie diesen.
Hinweis: Es kann helfen, sich Folgendes zu überlegen: Sind U, V Gruppen, so ist stets $\{ e_U \} \times V \subset U \times V$ eine Untergruppe.

Aufgabe 28: Exponent einer endlichen Gruppe *(4 Punkte)*

Es sei G eine endliche Gruppe. Der *Exponent* $e(G)$ von G ist die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass $a^n = 1$ für alle $a \in G$ gilt. (Es gilt also $e(G) \leq |G|$.)

(a) Geben Sie die Exponenten der folgenden Gruppen an: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

(b) Nun sei G eine beliebige endliche Gruppe. Zeigen Sie: Ist n irgendeine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass $a^n = 1$ für alle $a \in G$ gilt, so ist $e(G)$ ein Teiler von n. (*Hinweis:* Division mit Rest)

(c) Zeigen Sie: Der Exponent einer endlichen Gruppe G ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen aller Gruppenelemente.

Aufgabe 29: Fixpunkte *(4 Punkte)*

Eine Gruppe G operiere auf der Menge X. Ein Element $a \in X$ heißt *Fixpunkt* der Operation von G auf X, falls $g * a = a$ für alle $g \in G$ gilt.
Beweisen Sie, dass im Fall $|G| = 35$ und $|X| = 13$ immer ein solcher Fixpunkt existiert.