

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 7

Abgabe am Freitag, 07.12.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 30: Gruppenoperationen

(4 Punkte)

Wir betrachten für $t \in \mathbb{C}$ die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_t : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, z) &\longmapsto e^{tx}z.\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass durch φ_t eine Operation der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf \mathbb{C} definiert wird.
- Bestimmen und skizzieren Sie die Bahnen dieser Operation in Abhängigkeit von t .
Hinweis: Betrachten Sie zunächst $t \in \mathbb{R}$ und $t \in i\mathbb{R}$.
- Für welche t haben von null verschiedene Elemente $c \in \mathbb{C}$ nicht-triviale Stabilisatoren?
Geben Sie diese Stabilisatoren an.

Aufgabe 31: Konjugierte Untergruppen

(4 Punkte)

Es sei (G, \cdot) eine Gruppe und U eine Untergruppe von G . Eine Untergruppe V von G heißt konjugiert zu U , falls es ein $x \in G$ gibt mit $x \cdot U \cdot x^{-1} = V$. Die Menge

$$\text{Nor}(U) := \{a \in G \mid a \cdot U \cdot a^{-1} = U\}$$

nennen wir den *Normalisator* von U in G . Zeigen Sie, dass die Anzahl der zu U konjugierten Untergruppen gleich dem Index von $\text{Nor}(U)$ in G ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Operation von G auf der Menge der Untergruppen von G .

Aufgabe 32: Gruppenoperation der symmetrischen Gruppe

(4 Punkte)

Wir betrachten die Operation der symmetrischen Gruppe S_4 auf der Menge $X = \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ durch Permutation der Unbestimmten.

- Wie lang ist die Bahn des Polynoms $X_1^2 + X_2^2 + X_3 + X_4$? Wie viele Permutationen gibt es in S_4 , die dieses Polynom unverändert lassen?
- Gibt es bei dieser Operation eine Bahn der Länge 5?
- Geben Sie Polynome an, deren Bahnen die Längen 12 beziehungsweise 4 haben.

Aufgabe 33: Lemma von Burnside

Angenommen es werde ein Kartenstapel aus drei identischen Kartenspielen mit je 52 verschiedenen Karten zusammengemischt.

- Wieviele verschiedene Kombinationen von drei Karten können daraus gebildet werden?
Hinweis: Betrachten Sie die Operation der symmetrischen Gruppe S_3 auf der Menge der geordneten Tupel von Karten.
- Wieviele Möglichkeiten für Kombinationen von drei Karten gibt es, wenn nur zwei Kartenspiele mit je 52 Karten verwendet werden?