

## Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 8

Abgabe am Freitag, 14.12.2012 vor der Vorlesung

### Aufgabe 34: Lineare Endomorphismen

(4 Punkte)

Sei  $V$  ein – möglicherweise unendlichdimensionaler – Vektorraum über einem Körper  $K$  und  $\text{End}_K(V)$  die Menge der  $K$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $V$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\text{End}_K(V)$  mit den Verknüpfungen  $+$  und  $\circ$  ein Ring ist. Dabei ist  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$  und  $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ .
- (b) Bestimmen Sie die Nullteiler in  $\text{End}_K(V)$ .
- (c) Geben Sie einen zu  $K$  isomorphen Unterring von  $\text{End}_K(V)$  an.

### Aufgabe 35: Einheiten und Nullteiler

(8 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  ein Unterring von  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist. (Der Ring  $\mathbb{Z}[i]$  heißt *Ring der Gaußschen Zahlen*.)
- (b) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten in folgenden Ringen:
  - (i)  $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ ,
  - (ii)  $(\text{End}(G), +, \circ)$  für eine abelsche Gruppe  $(G, +)$ ,
  - (iii)  $(\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}), +, \cdot)$ , wobei  $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) := \{k\text{-fach stetig diffb. Abb. von } U \text{ nach } \mathbb{R}\}$  für eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,
  - (iv)  $R_1 \times R_2$  für zwei Ringe  $R_1$  und  $R_2$
  - (v)  $\mathbb{Z}_7$  und  $\mathbb{Z}_8$ .
- (c) Bestimmen Sie die Nullteiler in den obigen Ringen außer demjenigen in Teil (ii).

### Aufgabe 36: Integritätsringe

(4 Punkte)

Es sei  $R$  ein Integritätsring, der einen Körper  $K$  als Unterring enthält.

- (a) Zeigen Sie:  $R$  ist auf natürliche Weise ein  $K$ -Vektorraum.
- (b) Zeigen Sie: Ist  $\dim_K R < \infty$ , so ist  $R$  ein Körper.  
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass die Linkstranslation  $l_a$  für  $a \in R$  eine lineare Abbildung ist.
- (c) Bestimmen Sie den kleinsten Unterring von  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ , der  $\mathbb{Q}$  und  $\sqrt{2}$  enthält. Zeigen Sie, dass dieser schon ein Körper ist.