PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 9

Abgabe am Freitag, 21.12.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 37: Mengenring *(4 Punkte)*

Es sei M eine beliebige nicht-leere Menge. Wir betrachten auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, definiert durch

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ („Symmetrische Differenz“)}, \qquad A \cdot B := A \cap B.$$

Zeigen Sie:

(a) $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ ist ein Ring.

(b) Für jede Teilmenge $I \subset \mathcal{P}(M)$ mit $I \neq \emptyset$ gilt

$$I \text{ ist ein Ideal in } \mathcal{P}(M) \iff \mathcal{P}(A \cup B) \subset I \text{ für alle } A, B \in I.$$

Hinweis: $A \cup B$ lässt sich als Ausdruck in A, B mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ schreiben.

Aufgabe 38: Ideale *(4 Punkte)*

Es sei R ein kommutativer Ring. Für Ideale I und J in R definiert man:

$$\begin{aligned} I + J &:= \{a + b \mid a \in I, b \in J\}, \\ I \cdot J &:= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \;\middle|\; a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie:

(a) Die Mengen $I + J$ und $I \cdot J$ sind Ideale in R.
(*Zusatz:* Überlegen Sie sich, dass die Menge $\{a \cdot b \mid a \in I, b \in J\}$ im Allgemeinen kein Ideal darstellt.)

(b) Das Ideal $I + J$ ist das kleinste Ideal in R, das I und J enthält.

(c) Es gilt $I \cdot J \subset I \cap J$.

(d) Für Ideale I, J und K in R gilt: $I \cdot (J + K) = I \cdot J + I \cdot K$.

Aufgabe 39: Ideale und Homomorphismen *(4 Punkte)*

Seien R und S Ringe, I ein Ideal in R und $f : R \longrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus.

(a) Es sei $M_1 := \{\text{Ideale } J \text{ in } R \text{ mit } \ker f \subset J\}$ und $M_2 := \{\text{Ideale in } S\}$.
Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen M_1 und M_2 an, und folgern Sie, dass die Ideale in R/I 1:1 korrespondieren zu den Idealen J in R mit $I \subset J$.

Hinweis: Beachten Sie, dass für beliebige Teilmengen M die Inklusion $M \subset f^{-1}(f(M))$, im Allgemeinen aber nicht Gleichheit gilt.

(b) Seien nun $P \subset R$, $Q \subset S$ Primideale mit $\mathrm{kern} f \subset P$ und $M \subset R$, $N \subset S$ maximale Ideale mit $\mathrm{kern} f \subset M$. Welche Eigenschaften (Primideal, maximales Ideal) besitzen $f(P)$ und $f(M)$ beziehungsweise $f^{-1}(Q)$ und $f^{-1}(N)$?

Aufgabe 40: Lokale Ringe *(4 Punkte)*

Es sei R ein kommutativer Ring und R^* die Einheitengruppe in R. Man nennt R einen *lokalen Ring*, wenn er nur ein einziges maximales Ideal besitzt. Zeigen Sie, dass R genau dann ein lokaler Ring ist, wenn die Menge $R \setminus R^*$ der Nichteinheiten ein Ideal in R ist.

Hinweis: Sie dürfen die aus dem Zornschen Lemma folgende Aussage, dass jedes echte Ideal in einem maximalen Ideal enthalten ist, verwenden.