PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 10

Abgabe am Freitag, 18.01.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 41: Abspalten von Linearfaktoren *(3 Punkte)*

Wir betrachten die folgende Aussage:

> *Sei R ein kommutativer Ring und f ein Polynom aus $R[X]$. Ist $a \in R$ eine Nullstelle von f, so existiert eine Zerlegung $f = (X - a) \cdot g$ mit einem Polynom $g \in R[X]$.*

Geben Sie für diese Aussage einen elementaren Beweis, der ohne Polynomdivision auskommt, indem Sie folgendermaßen vorgehen:

(a) Behandeln Sie zunächst den Fall $a = 0$.

(b) Führen Sie den allgemeinen Fall auf den obigen zurück, indem Sie das Polynom $h(X) = f(X + a)$ betrachten.

Hinweis für Lehramtsstudierende: Im Fall $R = \mathbb{R}$ eignet sich diese elementare Argumentation auch für den Unterricht in der Oberstufe.

Aufgabe 42: Maximale Ideale und Primideale *(4 Punkte)*

Man bezeichnet für eine Teilmenge S eines Rings R das kleinste Ideal in R, das S enthält, mit (S).

(a) Wir betrachten die Ideale (X), $(2X)$, $(\{2, X\})$ und (X^2) in den Polynomringen $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$. Welche der Ideale sind in welchem der Ringe maximal, bzw. Primideale? Begründen Sie ihre Aussagen.

(b) Wir betrachten den Abbildungsring $R = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und für eine beliebige Teilmenge $V \subset \mathbb{R}$ das Ideal

$$I(V) := \{\, f \in R \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V \,\}.$$

Für welche Teilmengen V ist $I(V)$ ein Primideal? Geben Sie möglichst viele maximale Ideale an, in denen $I(V)$ enthalten ist.

Aufgabe 43: Ringe *(5 Punkte)*

Es sei

$$R_1 := \mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)\ , \quad R_2 := \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)\ , \quad R_3 := \mathbb{R}[X]/(X^2)\ .$$

(a) Zeigen Sie: $R_1 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
(Hinweis: Chinesischer Restsatz.)

(b) Zeigen Sie: $R_2 \cong \mathbb{C}$.

(c) In welchen der Ringe R_1, R_2, R_3 gibt es *nilpotente Elemente*, d.h. $a \neq 0$ mit $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$?

(d) Welche der Ringe sind Integritätsringe?

(e) Zeigen Sie, dass die Ringe paarweise nicht isomorph sind.

Aufgabe 44: Ferienaufgabe *(4 Bonuspunkte)*

Als eine Bande von 17 Piraten ihre Beute bestehend aus n Talern gleichmäßig unter sich aufteilen wollte, blieben 3 Taler übrig, und die Piraten beschlossen, diese ihrem chinesischen Koch Wun Tu als Dank für die gute Verpflegung zukommen zu lassen. Doch 6 Piraten starben bei einem Gefecht, und als die übrigen die Beute unter sich aufteilen wollten, blieben 4 Taler übrig, und wieder beschlossen sie, diese ihrem Koch zu geben. Schließlich ging ihr Schiff unter, und nur 6 Piraten, der Koch und die Beute wurden gerettet. Als nun die überlebenden 6 Piraten die Beute unter sich aufteilen wollten, blieben für den Koch 5 Taler übrig. Nun aber hatte der Koch genug von seinen ach so gütigen Herren. Er zauberte ihnen eine wohlschmeckende Pilzsuppe, die keiner der Piraten überlebte. So konnte er alle n Taler für sich behalten. Welches sind die zwei kleinstmöglichen Werte für n?

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!