PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 11

Abgabe am Freitag, 25.01.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 45: Kongruenzen im Polynomring *(4 Punkte)*

Im Ring $R := \mathbb{Z}_5[X]$ betrachten wir die Ideale $I := (X^2+1)$ und $J := (X^3-1)$.

(a) Zeigen Sie, dass $I + J = R$ gilt, indem Sie eine Darstellung der Eins ($1 = f(X) \cdot (X^2+1) + g(X) \cdot (X^3-1)$) konstruieren.

(b) Lösen Sie die folgenden simultanen Kongruenzen in R:

$$\begin{aligned} h(X) &\equiv X^5 - 3X^2 + 4 \pmod{(X^2+1)} \,, \\ h(X) &\equiv 2X^3 - X \pmod{(X^3-1)} \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 46: Hauptideale *(4 Punkte)*

Sei R ein Integritätsring und $a \in R$, $a \neq 0$, keine Einheit. Beweisen Sie, dass das von a und X in $R[X]$ erzeugte Ideal kein Hauptideal ist.

Hinweis: Dies ist ein alternativer Beweis für die Aussage der Vorlesung, dass der Polynomring über R nur dann ein Hauptidealring sein kann, wenn R ein Körper ist.

Aufgabe 47: Formale Potenzreihen *(2+1+2+1+2=8 Punkte)*

Der Begriff „Formale Potenzreihe“ ist eine Erweiterung des Polynombegriffs, der intuitiv dadurch entsteht, dass man anstelle „endlicher Summen“ $\sum_{i=1}^{n} a_i X^i$ „unendliche Summen“ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i$ betrachtet.

(a) Formulieren Sie eine Definition des Rings $R[[X]]$ der formalen Potzenreihen über einem kommutativen Ring R, die dieser intuitiven Vorstellung entspricht. Die Definition soll in Analogie zur Definition von $R[X]$ gefasst sein, so dass $R[X]$ eine Teilmenge von $R[[X]]$ wird.

(Definieren Sie die Objekte in $R[[X]]$ sowie zwei Verknüpfungen „Addition“ und „Multiplikation“, die dem intuitiven Addieren und Multiplizieren der formalen Summen entsprechen.)

(b) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} X^i$ multiplikativ invers zu $1 - X$ ist.

(c) Welche Elemente von $R[[X]]$ sind Einheiten?

Hinweis: Machen Sie zu gegebener Potenzreihe $(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \ldots)$ den Ansatz $(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \ldots) = 1$ und ermitteln Sie durch Ausmultiplizieren die Koeffizienten b_i.

(d) Gibt es Nullteiler in $R[[X]]$?

(e) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[[X]]$ ein Hauptidealring ist.

Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass sich jede von Null verschiedene Potenzreihe $f \in K[[X]]$ in der Form $f = X^n \cdot u$ schreiben lässt, wobei u eine Einheit ist und $n \geq 0$.