PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 12

Abgabe am Freitag, 01.02.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 48: Größter gemeinsamer Teiler *(3 Punkte)*

Es seien die Polynome $p := X^6 + 3X^4 - 2$ und $q := 2X^5 + 4X^3 + 2X$ gegeben. Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d von p und q in $\mathbb{R}[X]$, und finden Sie Polynome g und f aus $\mathbb{R}[X]$ mit $d = g \cdot p + f \cdot q$.

Aufgabe 49: Kleinstes gemeinsames Vielfaches *(4 Punkte)*

(a) Definieren Sie in Analogie zum ggT den Begriff *kleinstes gemeinsames Vielfaches* zweier Elemente – zunächst in $\mathbb{Z}$ und dann in beliebigen Integritätsringen.

(b) Zeigen Sie, dass – in $\mathbb{Z}$ und in beliebigen Hauptidealringen – je zwei Elemente a und b mit $(a, b) \neq (0, 0)$ ein kleinstes gemeinsames Vielfaches $\mathrm{kgV}(a, b)$ besitzen.

Hinweis: Der Durchschnitt $(a) \cap (b)$ ist ein Ideal in R.

(c) In einem Hauptidealring R sei d ein $\mathrm{ggT}(a, b)$ und e ein $\mathrm{kgV}(a, b)$. Zeigen Sie:

$$de \sim ab .$$

Aufgabe 50: Teilbarkeit, ggT und kgV in faktoriellen Ringen *(5 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, wie sich aus den Primfaktorzerlegungen zweier Elemente a und b eines faktoriellen Rings der ggT und das kgV von a und b bestimmen lassen. Geben Sie genau an, wo Sie im Beweis die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung nutzen.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Regeln für beliebige Elemente a, b, c eines faktoriellen Rings gelten:

(i) $a \mid c,\ b \mid c,\ \mathrm{ggT}(a, b) = 1 \implies ab \mid c$

(ii) $a \mid bc,\ \mathrm{ggT}(a, b) = 1 \implies a \mid c$

Weisen Sie genau aus, an welchen Stellen Sie in Ihrer Argumentation die *Eindeutigkeit* der Primfaktorzerlegung nutzen.

(c) Zu einem Element a eines faktoriellen Rings R sei die Primfaktorzerlegung gegeben, $a = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$. Wieviele Teiler hat a (wobei die Teiler nur bis auf Assoziierte gezählt werden sollen)?

(d) Wie viele Teiler hat die Zahl 123456?

Aufgabe 51: Irreduzible Elemente in $\mathbb{R}[X]$ *(4 Punkte)*

(a) Sei f ein Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und z eine komplexe Zahl mit $f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass auch die komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von f ist.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Polynom f mit reellen Koeffizienten in Faktoren $f_i \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(f_i) \leq 2$ zerfällt: $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_l$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass in $\mathbb{C}[X]$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

(c) Bestimmen Sie alle irreduziblen Elemente in $\mathbb{R}[X]$.