PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
Dr. D. Schmitz

Wintersemester 2012/2013

Aufgaben zur Vorlesung Algebra I

Blatt 13

Abgabe am Freitag, 08.02.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 52: Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten *(5 Punkte)*

(a) Es sei $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und $\frac{a}{b}$ mit teilerfremden $a, b \in \mathbb{Z}$ eine rationale Nullstelle von f. Zeigen Sie:

$$a \mid a_0 \qquad \text{und} \qquad b \mid a_n \ .$$

(b) Sei f ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Begründen Sie, dass jede rationale Nullstelle von f ganzzahlig ist.

(c) Bestimmen Sie alle rationalen Nullstellen des Polynoms $X^{42} + 2X^{27} - 2X^2 - 1$.

(d) Formulieren und begründen Sie eine Verallgemeinerung der Aussage in Teil b) für Polynome über einem faktoriellen Ring. (Statt rationaler Nullstellen nehmen wir Nullstellen im Quotientenkörper an.) Heben Sie diejenigen Stellen in Ihrer Argumentation hervor, an denen Sie die Voraussetzung „faktoriell“ benötigen.

Aufgabe 53: Irreduzbible Zerlegungen *(4 Punkte)*

Zerlegen Sie die folgenden Elemente in den angegebenen Ringen in irreduzible Elemente. Geben Sie jeweils an, ob Ihre Zerlegung die einzige (bis auf Assoziierte) ist und ob die irreduziblen Faktoren prim sind.

(a) Die Zahl $2 + 6i$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Die Zahl $-3 + 3\sqrt{-5}$ im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(c) Das Polynom $2X^2 + 4X - 10$ in jedem der Ringe $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$.

Hinweis: In (a) und (b) können sie die in Betracht kommenden Teiler mit Hilfe der Normabbildung $z \longmapsto N(z) = |z|^2$ bestimmen.

Aufgabe 54: Irreduzibilitätskriterien *(3 Punkte)*

Untersuchen Sie die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ auf Irreduzibilität:

(a) $2X^4 + 3X^2 + 12X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$,

(b) $X^4 - 6X^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$,

(c) $X^4 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$,

(d) $X^n - T \in (\mathbb{R}(T))\,[X]$,

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass T ein Primelement in $\mathbb{R}[T]$ ist.

(e) $Y^3 + X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X, Y]$,

(f) $2X^3 + X^2 + 3X + 20 \in \mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 55: *(4 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

(a) Ist R ein Euklidischer Ring, so ist $R[X]$ ein faktorieller Ring.

(b) Ist R ein Integritätsring, so ist $R[X]$ ein Euklidischer Ring.
(c) Ist $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Hauptidealring.
(d) Ist R ein Hauptidealring, so ist $R[X]$ ein Hauptidealring.
(e) Ist R ein Körper, so ist $R[X, Y]$ ein Euklidischer Ring.
(f) Ist $R[X, Y]$ ein faktorieller Ring, so ist R ein faktorieller Ring.
(g) Ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal M, so ist $(R/M)[X]$ ein Euklidischer Ring.
(h) In einem Euklidischen Ring sind alle irreduziblen Elemente auch Primelemente.