PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Sommersemester 2010
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Aufgaben zur Analysis I – Präsenzblatt

Besprechung im ersten Tutorium

Die folgenden Aufgaben sind für das erste Tutorium (mündlich) vorzubereiten und werden dort gemeinsam besprochen.
Einige Aufgaben werden nicht nur wegen des Übungseffekts von Bedeutung sein, sondern auch, weil die darin formulierten Aussagen an und für sich interessant und wichtig sind; es ist gut, sich die Aussagen zu merken – zum Beispiel, da wir sie eventuell an späterer Stelle benutzen werden. Solche Aufgaben von „unabhängigem Interesse" werden wir am Rand mit der Markierung ‚▶' kennzeichnen.

▶ Aufgabe 1: Mengen

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ sowie B Mengen. Zeigen Sie, dass gilt:
(a) $B \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n (B \setminus A_i)$,
(b) $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$.

Aufgabe 2: Vollständige Induktion

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:
(a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

(b) Es gilt $2^n \geq n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$.

Aufgabe 3: Logiksymbole

(a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in Worten und entscheiden Sie, ob sie zutreffen oder nicht.
 (i) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N} : n < m^2$.
 (ii) $\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, m \in \mathbb{N} : n < m^2$.
 (iii) $\forall\, n, m \in \mathbb{Z} : n > m \Rightarrow n^2 > m^2$.
(b) Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Logiksymbolen und entscheiden Sie, ob sie zutreffen oder nicht.
 (i) Für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m, die größer als n ist.
 (ii) Für alle natürlichen Zahlen n und m ist das Quadrat der Summe von n und m größer als die Summe der Quadrate von n und m.
 (iii) Jede natürliche Zahl ist höchstens so groß wie ihr Quadrat.