PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Sommersemester 2010
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 1

Abgabe am Freitag, 23.04.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

▸ **Aufgabe 4: Abbildungen** *(4 Punkte)*

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und A sowie B Teilmengen von Y.
Die Menge

$$f^{-1}(A) := \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

heißt das *Urbild von A unter f*. Zeigen Sie:

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

▸ **Aufgabe 5: Abbildungen** *(4 Punkte)*

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und A sowie B Teilmengen von X.
Die Menge

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

heißt das *Bild von A unter f*.
Zeigen Sie:

(a) Es gilt: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(b) Es gilt: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
(c) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass im Allgemeinen die Gleichung $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ nicht gilt.

Aufgabe 6: Vollständige Induktion *(4 Punkte)*

Beweisen Sie die folgende Aussage mittels vollständiger Induktion:
Sei $q \neq 1$ eine reelle Zahl. Für alle natürlichen Zahlen gilt

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + q^{\left(2^k\right)}\right) = \frac{q^{\left(2^{n+1}\right)} - 1}{q - 1}.$$

▸ **Aufgabe 7: Rechenregeln in $\mathbb{R}$** *(4 Punkte)*

Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen:

(a) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : -(a + b) = (-a) + (-b)$,
(b) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$,
(c) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$,
(d) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Geben Sie in jedem Beweisschritt an, welches der Körperaxiome (K1 bis K5) bzw. welche in der Vorlesung bewiesene Eigenschaft von $\mathbb{R}$ Sie benutzen.

Hinweis: Für den Beweis von (d) dürfen Sie die Gültigkeit von (c) voraussetzen.