

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 2

Abgabe am Freitag, 30.04.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

► **Aufgabe 8: Rechenregeln für Ungleichungen** (4 Punkte)

Seien a, a', b und b' reelle Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

- (a) $a < b \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ : c \cdot a < c \cdot b$,
- (b) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$,
- (c) $0 < a < b$ und $0 < a' < b' \Rightarrow a \cdot a' < b \cdot b'$.

Geben Sie in jedem Beweisschritt an, welches der Anordnungsaxiome (A1 bis A3) bzw. welche in der Vorlesung bewiesene Eigenschaft von \mathbb{R} Sie benutzen.

Hinweis: Die Regeln (b) und (c) können Sie aus (a) folgern; in (b) können Sie einen Widerspruchsbeweis führen.

► **Aufgabe 9: Dichtheit der rationalen Zahlen in \mathbb{R}** (4 Punkte)

Zeigen Sie: Zwischen je zwei (verschiedenen) reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl. Mit anderen Worten: Zu je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.

Hinweis: Im Fall $0 < a < b$ können Sie das gesuchte r in der Form $\frac{m}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl mit $\frac{1}{n} < b - a$ und m eine natürliche Zahl mit $\frac{m}{n} > a$ ist, konstruieren. Veranschaulichen Sie sich die Beweisidee an einer Skizze!

Aufgabe 10: Supremum (4 Punkte)

Für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ betrachten wir die Menge $A + B$, die durch

$$A + B := \{ a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$$

definiert ist.

Zeigen Sie: Falls A und B nichtleer und nach oben beschränkt sind, so ist auch $A + B$ nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Hinweis: Beweisen Sie für letzteres die beiden Ungleichungen $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$ und $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$.

Aufgabe 11: Ungleichungen (4 Punkte)

Es seien a, b positive reelle Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b$ ist.

Übrigens: Die obigen Ausdrücke werden als harmonisches, geometrisches, beziehungsweise arithmetisches Mittel bezeichnet.