PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Sommersemester 2010

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 3

Abgabe am Freitag, 07.05.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

Aufgabe 12: Supremum/Infimum *(4 Punkte)*

Wir definieren zu einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$ die Menge $-A := \{ -a \mid a \in A \}$.
Zeigen Sie:

(a) $\inf(-A) = -\sup(A)$
(b) $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Aufgabe 13: Abzählbarkeit *(4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M_2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge reeller Zahlen}\}$$

nicht abzählbar ist.

Anleitung: Nehmen Sie an, dass eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & M_2 \\ k & \mapsto & \left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

existiert und betrachten Sie die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch $b_n := a_n^{(n)} + 1$. Konstruieren Sie einen Widerspruch ähnlich zum Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}^k := \underbrace{\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{k \text{ mal}}$ für $k \in \mathbb{N}$ abzähbar ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass für abzählbare Mengen A und B das kartesische Produkt $A \times B$ abzählbar ist und schließen Sie dann per Induktion.

▸ **Aufgabe 14: Divergenz der Folge q^n** *(4 Punkte)*

Sei q eine reelle Zahl mit $|q| > 1$. Beweisen Sie, dass die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 15: Grenzwerte von Teilfolgen *(4 Punkte)*

(a) Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren zwei Teilfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := c_{2n} \quad \text{und} \quad b_n := c_{2n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} .$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $c \in \mathbb{R}$.
(ii) Die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen $c \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie Beispiel an, das zeigt, dass die obige Äquivalenz für Teilfolgen $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a'_n := c_{3n}$ und $b'_n := c_{3n-1}$ nicht gilt.