PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Sommersemester 2010

Aufgaben zur Analysis I – Blatt 4

Abgabe am Freitag, 14.05.2010, 10:00-10:10 Uhr vor HG 5

Aufgabe 16: Grenzwerte von Folgen *(4 Punkte)*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:

(a) $\left(\frac{(2-n)^2}{2n^2-2}\right)_{n\geq 2}$

(b) $\left((-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *Hinweis:* Multiplizieren Sie zunächst mit $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Dies ist übrigens ein Standardtrick.

Aufgabe 17: Permutierte Folge *(4 Punkte)*

Sei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Folge $\left(a_{\pi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen a konvergiert.

Aufgabe 18: Kettenwurzeln *(4 Punkte)*

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass durch den Ausdruck

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$$

eine reelle Zahl bestimmt ist und diese soll berechnet werden. Mit anderen Worten: Es ist zu zeigen, dass die Folge (a_n), die rekursiv durch

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \sqrt{2+a_n}$$

definiert ist, konvergiert, und ihr Grenzwert ist zu berechnen. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton steigend ist.

(c) Folgern Sie, dass (a_n) konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 19: Häufungspunkte von Folgen *(4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie die Häufungswerte der Folge (a_n) mit

$$a_n := (-1)^n \cdot \left(b_n + \frac{1}{n}\right), \text{ wobei } b_n := \begin{cases} 1 & \text{, falls } n \text{ oder } n+1 \text{ durch 4 teilbar ist} \\ 2 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Geben Sie (falls existent) liminf und limsup an.

(b) Sei $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto r_n$, eine (bijektive) Abzählung von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl ein Häufungswert der Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.